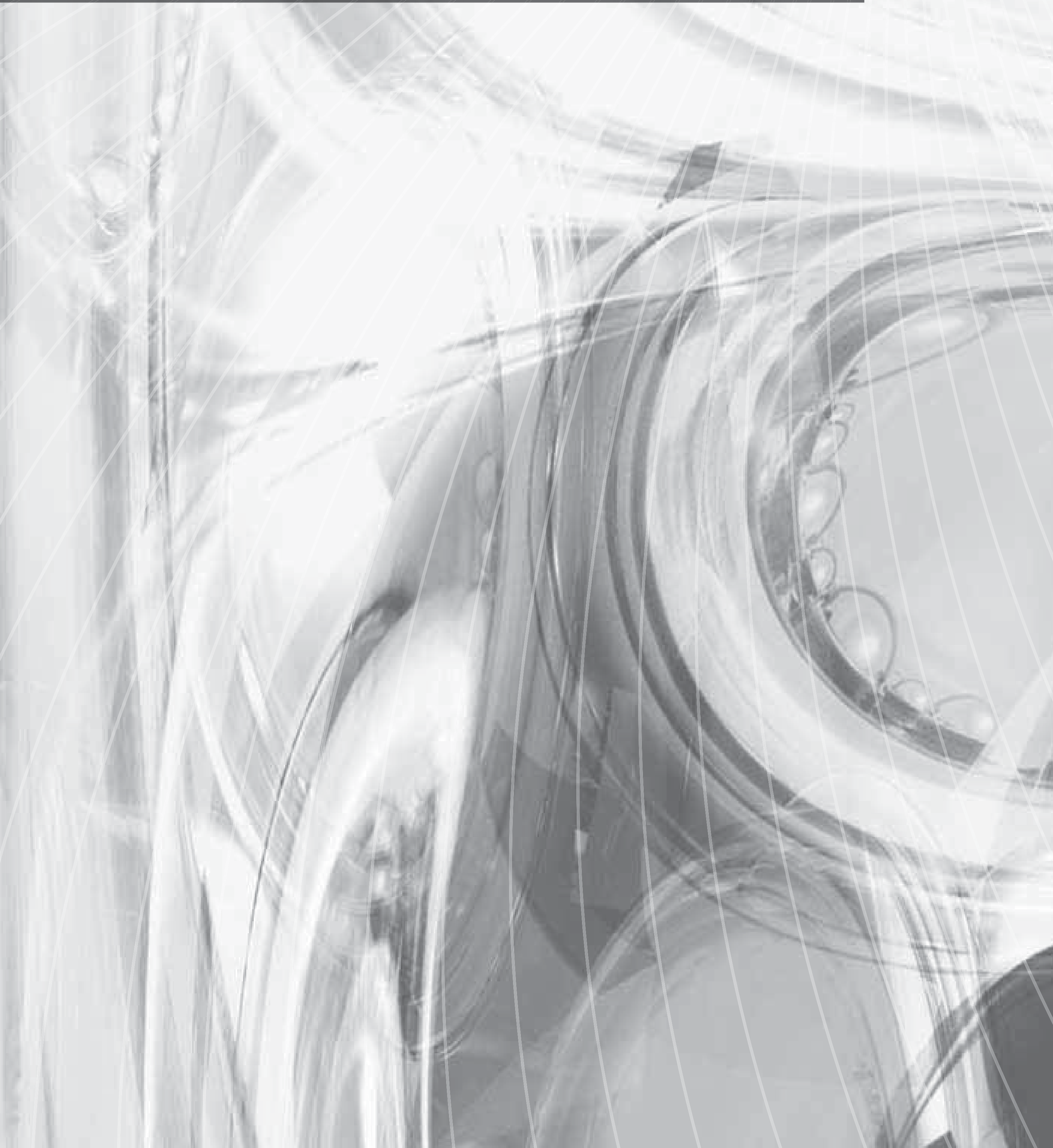
Geometría analítica



CAPÍTULO 1

GEOMETRÍA ANALÍTICA UNIDIMENSIONAL

Reseña HISTÓRICA

René Descartes

(1596-1650)

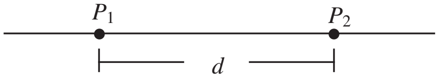
Filósofo y matemático francés, nació en 1596. Entre sus principales aportes a la filosofía está su famoso *Discurso del método*. Descartes afirmó que los orígenes de esta obra filosófica estaban en la lógica, la geometría y el álgebra. Por otra parte, este pensador ilustre hizo una importante contribución a las matemáticas. Al *Discurso del método* le añadió un "anexo" titulado Geometría, en el cual propuso un sistema nuevo para estudiar esta disciplina. Gracias al "sistema de coordenadas cartesianas", creado por Descartes y denominado así en su honor, diversas áreas de las matemáticas tuvieron un rápido desarrollo en los años posteriores. Este sistema permite asignar a cada punto del plano una pareja de números reales que lo identifica, inequívocamente. Así, cualquier figura geométrica puede ser identificada con un conjunto de parejas de números reales.

Segmento de recta

Se define como la porción de recta limitada por dos puntos no coincidentes.

Distancia entre dos puntos

Es la longitud de un segmento de recta. Dados los puntos $P_1(x_1)$ y $P_2(x_2)$ en la recta numérica:



La distancia que existe entre ellos se obtiene mediante la expresión:

$$d = |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$$

EJEMPLOS

1 ¿Cuál es la distancia que existe entre los puntos $P_1(-6)$ y $P_2(8)$?

Solución

Se sustituye $x_1 = -6$ y $x_2 = 8$ en la fórmula, y la distancia entre los puntos es:

$$d = |8-(-6)| = |8+6| = |14| = 14u$$

Donde u representa la unidad de longitud que se utiliza.

2 Determina la distancia entre los puntos $P\left(\frac{2}{3}x\right)$ y $Q\left(-\frac{1}{6}x\right)$, con $x > 0$.

Solución

Se sustituye $x_1 = \frac{2}{3}x$ y $x_2 = -\frac{1}{6}x$ en la fórmula y se obtiene:

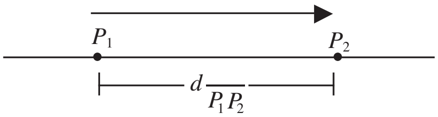
$$d = \left| -\frac{1}{6}x - \frac{2}{3}x \right| = \left| -\frac{5}{6}x \right| = \frac{5}{6}x$$

Por consiguiente, la distancia entre los puntos es de $\frac{5}{6}x$ unidades.

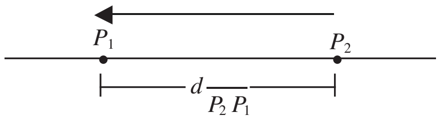
Distancia dirigida

Es aquella que al medirla se establece un sentido entre sus puntos.

La distancia dirigida de P_1 a P_2 es: $d_{\overline{P_1P_2}} = x_2 - x_1$.



Ahora bien, la distancia dirigida de P_2 a P_1 es, $d_{\overline{P_2P_1}} = x_1 - x_2$.



Por consiguiente, se observa que: $d_{\overline{P_1P_2}} = x_2 - x_1 = -x_1 + x_2 = -(x_1 - x_2) = -d_{\overline{P_2P_1}}$. Es decir, el orden de los puntos indica el sentido del segmento de recta.

$$\overline{P_1P_2} = -\overline{P_2P_1}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén la distancia dirigida $\overline{BA}$, si $A\left(\frac{2}{3}\right)$ y $B\left(\frac{1}{6}\right)$.

Solución

Se toma $x_1 = \frac{1}{6}$ y $x_2 = \frac{2}{3}$, se sustituye en la fórmula $d_{\overline{BA}} = x_2 - x_1$ y se obtiene como resultado:

$$d_{\overline{BA}} = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{4-1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}\,u$$

2 ¿Cuál es la distancia dirigida $\overline{PQ}$ y $\overline{QP}$, si $P\left(1\frac{1}{3}\right)$ y $Q\left(-\frac{2}{5}\right)$?

Solución

Para obtener la distancia de $\overline{PQ}$, se toma $x_1 = 1\frac{1}{3}$ y $x_2 = -\frac{2}{5}$, se sustituyen en la expresión:

$$d_{\overline{PQ}} = x_2 - x_1$$

$$d_{\overline{PQ}} = -\frac{2}{5} - 1\frac{1}{3} = -\frac{2}{5} - \frac{4}{3} = \frac{-6-20}{15} = -\frac{26}{15} = -1\frac{11}{15}\,u$$

Finalmente, el resultado es: $-\frac{26}{15}u = -1\frac{11}{15}u$.

Para obtener la distancia de $\overline{QP}$ se sustituyen los valores de x_1 y x_2 en la fórmula:

$$d_{\overline{QP}} = x_1 - x_2$$

$$d_{\overline{QP}} = 1\frac{1}{3} - \left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{4}{3} + \frac{2}{5} = \frac{20+6}{15} = \frac{26}{15} = 1\frac{11}{15}\,u$$

Estos resultados demuestran que:

$$\overline{QP} = -\overline{PQ}$$

EJERCICIO 1

Determina la distancia entre los siguientes pares de puntos.

1. $A(-2)$ y $B(1)$
2. $P_1(-5)$ y $P_2(-1)$
3. $M\left(-\sqrt{3}\right)$ y $N\left(4\sqrt{3}\right)$
4. $P(-6)$ y $Q\left(-\frac{7}{2}\right)$
5. $A\left(\frac{3}{4}\right)$ y $B\left(-\frac{1}{2}\right)$
6. $S(-0.5)$ y $T\left(\frac{1}{2}\right)$
7. $S\left(\frac{3}{8}\right)$ y $T\left(-\frac{1}{6}\right)$
8. $A\left(\frac{6}{5}\right)$ y $B\left(-\frac{11}{5}\right)$
9. $P(3a)$ y $Q(-2a)$
10. $P_1\left(\frac{2}{3}a\right)$ y $P_2\left(-\frac{5}{12}a\right)$

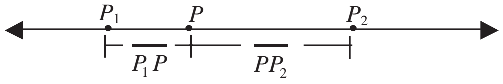
Para los puntos: $A(-3)$, $B(4)$, $C\left(\frac{3}{4}\right)$ y $D\left(-\frac{1}{2}\right)$, obtén las siguientes distancias dirigidas:

11. $\overline{AB}$
12. $\overline{DC}$
13. $\overline{AD}$
14. $\overline{BA}$
15. $\overline{CB}$
16. $\overline{DA}$
17. $\overline{DB}$
18. $\overline{CA}$
19. $\overline{BC}$
20. $\overline{CD}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

División de un segmento en una razón dada

Sea el segmento definido por los puntos $P_1(x_1)$ y $P_2(x_2)$, si $P(x)$ es un punto sobre el segmento $\overline{P_1P_2}$, entonces P lo divide en los segmentos $\overline{P_1P}$ y $\overline{PP_2}$ en la razón r.



Donde la razón se define como:

$$r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} \text{ o } r = \overline{P_1P} : \overline{PP_2}$$

Siendo $\overline{P_1P} = x - x_1$ y $\overline{PP_2} = x_2 - x$, por tanto:

$$r = \frac{x - x_1}{x_2 - x}, \text{ con } x_2 \neq x$$

Finalmente, la coordenada del punto de división P es:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}, \text{ con } r \neq -1$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 El punto $P(-3)$ se encuentra entre los puntos $P_1(-5)$ y $P_2(0)$. Encuentra la razón en que el punto P divide al segmento $\overline{P_1P_2}$.

Solución

Se sustituyen en la fórmula los siguientes valores: $x = -3$, $x_1 = -5$ y $x_2 = 0$.

$$r = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{-3-(-5)}{0-(-3)} = \frac{-3+5}{0+3} = \frac{2}{3}$$

Por consiguiente, la razón es igual a: $\frac{2}{3}$.

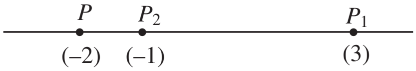
2 ¿Cuál es la razón $r = \overline{P_1P} : \overline{PP_2}$ en que el punto $P(-2)$ divide al segmento $\overline{P_1P_2}$, cuyas coordenadas son $P_1(3)$ y $P_2(-1)$?

Solución

Dados $x = -2$, $x_1 = 3$ y $x_2 = -1$, se sustituyen en la fórmula de la razón para obtener como resultado:

$$r = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{-2-3}{-1-(-2)} = \frac{-5}{-1+2} = \frac{-5}{1} = -5$$

El signo negativo de la razón indica que el punto $P(-2)$ se encuentra sobre la misma recta, pero fuera del segmento $\overline{P_1P_2}$.



3 Determina la coordenada del punto de división del segmento definido por los puntos: $A(-1)$ y $B\left(\frac{4}{3}\right)$ si están en la relación $r = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = -\frac{1}{2}$.

Solución

Se identifican y sustituyen en la fórmula correspondiente los valores, para obtener:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r} \Rightarrow x = \frac{-1+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{3}\right)}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-1-\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{5}{3}}{\frac{1}{2}} = -\frac{10}{3}$$

Por tanto, la coordenada del punto P es $-\frac{10}{3}$.

EJERCICIO 2

Encuentra la razón en que el punto P divide al segmento, cuyos extremos son P_1 y P_2.

1. $P_1(-3)$, $P_2(9)$ y $P(0)$
2. $P_1(4)$, $P_2(-6)$ y $P(2)$
3. $P_1(-10)$, $P_2(2)$ y $P(-4)$
4. $P_1(-5)$, $P_2(0)$ y $P(2)$
5. $P_1\left(-\frac{3}{7}\right)$, $P_2(4)$ y $P(-1)$
6. $P_1\left(-\frac{1}{2}\right)$, $P_2\left(\frac{3}{2}\right)$ y $P\left(\frac{1}{4}\right)$
7. $P_1\left(-\frac{5}{8}\right)$, $P_2\left(\frac{5}{8}\right)$ y $P\left(\frac{1}{4}\right)$
8. $P_1\left(-\frac{3}{4}\right)$, $P_2\left(-\frac{5}{4}\right)$ y $P(1)$

Determina el valor de la coordenada del punto $P(x)$ que divide a los siguientes segmentos, en las razones que se indican a continuación:

9. $P_1(-2)$, $P_2(6)$ y $r = -\frac{1}{4}$
10. $P_1\left(-\frac{3}{2}\right)$, $P_2(4)$ y $r = -3$
11. $P_1(-4)$, $P_2(2)$ y $r = \frac{1}{3}$
12. $P_1\left(\frac{1}{2}\right)$, $P_2\left(\frac{9}{2}\right)$ y $r = 1$
13. $P_1\left(-\frac{2}{5}\right)$, $P_2\left(-\frac{7}{4}\right)$ y $r = \frac{1}{2}$
14. $P_1\left(-\frac{3}{10}\right)$, $P_2\left(\frac{4}{5}\right)$ y $r = -\frac{1}{5}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Punto medio

Es aquel que divide a un segmento en dos partes iguales. La coordenada del punto medio, P_m, del segmento definido por los puntos $P_1(x_1)$ y $P_2(x_2)$, se determina tomando la razón $r = 1$.

Se sustituye en $x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}$ y se obtiene la coordenada del punto medio que es:

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el punto medio del segmento, cuyos extremos son $P_1(-6)$ y $P_2(4)$.

Solución

Se sustituyen en la fórmula los valores de $x_1 = -6$ y $x_2 = 4$, para obtener como resultado:

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} \Rightarrow x_m = \frac{-6 + 4}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Por tanto, resulta que $P_m(-1)$.

2 Uno de los extremos de un segmento es el punto $P_1(-5)$ y la coordenada de su punto medio es $P_m\left(-\frac{7}{2}\right)$. ¿Cuál es la coordenada del otro extremo?

Solución

La coordenada que se desea encontrar es x_2, se sustituye $x_1 = -5$ y $x_m = -\frac{7}{2}$ en la fórmula, para después despejar x_2:

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} \rightarrow -\frac{7}{2} = \frac{-5 + x_2}{2} \rightarrow x_2 = -7 + 5 = -2, \text{ se obtiene } P_2(-2).$$

EJERCICIO 3

Determina la coordenada del punto medio de los siguientes segmentos:

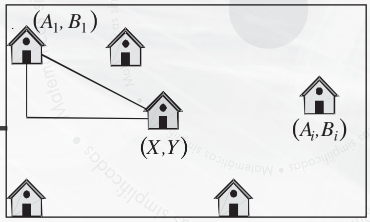
1. $P(3)$ y $Q(-1)$
2. $S(4)$ y $T(7)$
3. $M(-6)$ y $N(-4)$
4. $R\left(-\frac{2}{3}\right)$ y $P\left(-\frac{1}{2}\right)$
5. $P\left(\frac{1}{6}\right)$ y $T\left(\frac{2}{3}\right)$
6. $A\left(-\frac{3}{4}\right)$ y $B\left(\frac{1}{6}\right)$
7. $C\left(-2\sqrt{3}\right)$ y $D\left(5\sqrt{3}\right)$
8. $E\left(\frac{3}{4}a\right)$ y $F\left(-\frac{7}{6}a\right)$
9. $H\left(-\frac{1}{2}\right)$ y $J(-3)$
10. Un extremo de un segmento es el punto $P(-1)$ y su punto medio es el punto $P_m\left(-\frac{5}{4}\right)$. ¿Cuál es la coordenada del otro extremo?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Capítulo 2

Geometría analítica bidimensional

El problema de Weber



Gráfica del problema de Weber

"Los problemas de localización investigan la mejor decisión de dónde localizar una o unas centrales que a su vez satisfaga unos puntos de demanda o clientes, sistemas de distribución o sistemas logísticos." Uno de los problemas más sencillos de localización es determinar el lugar hacia el cual se transportará material, acarreando un costo por unidad de distancia. Esto es lo que se conoce en administración de operaciones como "el problema de Weber".

El problema toma como base las coordenadas de los puntos desde o hacia los cuales hay que transportar el material. El sistema de coordenadas se puede tomar arbitrariamente desde un mapa, dando parejas ordenadas (Ai, Bi) para denotar la posición óptima del desplazamiento por las variables X, Y.

El problema se resuelve al encontrar las coordenadas del punto (X,Y) del nuevo desplazamiento, tal que el costo de transporte total sea mínimo.

$Min\ Z = \sum Wi \cdot di$, donde di es la distancia que hay entre (X,Y) y (Ai, Bi), dada en unidades de longitud. Wi es el costo por unidad de longitud.

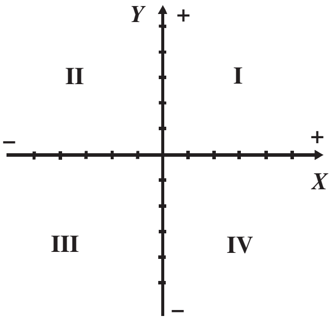
$$X = \frac{\sum \frac{Wi}{di}}{\sum \frac{Wi \cdot Ai}{di}} \quad , \quad Y = \frac{\sum \frac{Wi \cdot Bi}{di}}{\sum \frac{Wi}{di}}$$

Con $di = \sqrt{(X - Ai)^2 + (Y - Bi)^2}$

Plano cartesiano

El plano cartesiano son dos rectas perpendiculares, cuyo punto de intersección se denomina origen. La recta horizontal recibe el nombre de eje X o eje de las abscisas y la recta vertical recibe el nombre de eje Y o eje de las ordenadas.

El plano cartesiano presenta cuatro regiones llamadas "cuadrantes" y a cada punto P se le asigna un par coordenado $P\,(x, y)$.

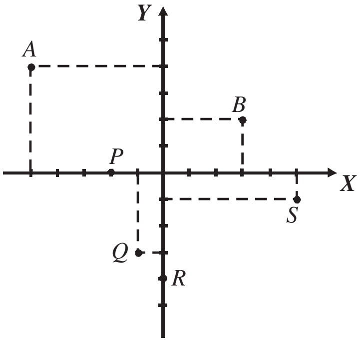


Localización de puntos

Para localizar un punto $P(x, y)$ en el plano cartesiano se toma como referencia el origen a partir de él, se avanza tanto como lo indique el primer número (abscisa) hacia la derecha o izquierda, según sea su signo, y a partir de la nueva posición se avanza hacia arriba o abajo, según lo indique el signo del segundo número (ordenada).

Ejemplo

Grafica los siguientes puntos $A(-5, 4)$, $B(3, 2)$, $P(-2, 0)$, $Q(-1, -3)$, $R(0, -4)$ y $S(5, -1)$ en el plano cartesiano.



EJERCICIO 4

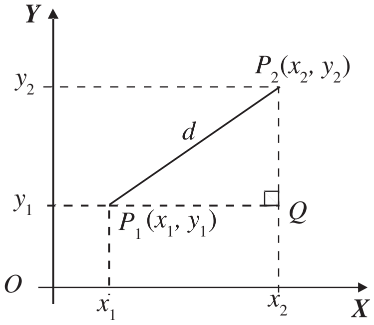
Localiza en el plano cartesiano los siguientes puntos y únelos:

1. $A(3, -1)$, $B(4, 3)$
2. $A(0, 2)$, $B(3, 0)$
3. $A(-1, 2)$, $B(4, 5)$, $C(2, -3)$
4. $A(0, 5)$, $B(2, 1)$, $C(-3, 4)$
5. $A(-3, 2)$, $B(0, -2)$, $C(1, 1)$
6. $A(1, 4)$, $B(-2, 1)$, $C(2, -3)$, $D(4, 2)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Distancia entre dos puntos

Dados $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ puntos del plano, la distancia que existe entre ellos se determina de la siguiente forma:



En el triángulo P_1QP_2, por el teorema de Pitágoras

$$\left(\overline{P_1P_2}\right)^2 = \left(\overline{P_1Q}\right)^2 + \left(\overline{QP_2}\right)^2$$

Pero, $\overline{P_1P_2} = d$, $\overline{P_1Q} = x_2 - x_1$ y $\overline{QP_2} = y_2 - y_1$ entonces:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\text{, con}$$

$$d = \overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_1}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es la distancia entre los puntos $A(6, 3)$ y $B(3, -1)$?

Solución

Se sustituye en la fórmula, $x_1 = 6$, $y_1 = 3$, $x_2 = 3$ y $y_2 = -1$ y se obtiene:

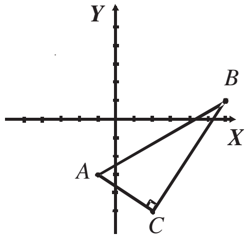
$$d = \sqrt{(3-6)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5u$$

2 Demuestra que el triángulo ABC formado por los puntos $A(-1, -3)$, $B(6, 1)$ y $C(2, -5)$ es rectángulo.

Demostración

El triángulo es rectángulo si la suma de los cuadrados de sus lados menores (catetos) es igual al cuadrado del lado mayor (hipotenusa).

Se aplica la fórmula de distancia para obtener la longitud de cada lado del triángulo:



$$d_{AB} = \sqrt{(6-(-1))^2 + (1-(-3))^2} = \sqrt{(7)^2 + (4)^2} = \sqrt{49+16} = \sqrt{65}$$

$$d_{BC} = \sqrt{(2-6)^2 + (-5-1)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$$

$$d_{AC} = \sqrt{(2-(-1))^2 + (-5-(-3))^2} = \sqrt{(3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

Por el teorema de Pitágoras:

$$d_{AB}{}^2 = d_{BC}{}^2 + d_{AC}{}^2$$

$$\left(\sqrt{65}\right)^2 = \left(\sqrt{52}\right)^2 + \left(\sqrt{13}\right)^2$$

$$65 = 52 + 13$$

$$65 = 65$$

Se demuestra entonces que el triángulo ABC es rectángulo.

3 La distancia entre dos puntos es $\sqrt{34}$. Si uno de los extremos tiene coordenadas $A(1, 3)$ y la abscisa del punto B es la mitad de la ordenada, determina las coordenadas del extremo B.

Solución

Las coordenadas del punto B están en la relación $x = \frac{1}{2}y$, por consiguiente, el punto se expresa como $B\left(\frac{1}{2}y,\ y\right)$.

Al sustituir en la fórmula, se despeja a y:

Se elevan ambos miembros al cuadrado $\sqrt{\left(\frac{1}{2}y-1\right)^2+(y-3)^2}=\sqrt{34} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{1}{2}y-1\right)^2+(y-3)^2 = 34$ Se desarrollan binomios

$$\frac{1}{4}y^2-y+1+y^2-6y+9 = 34$$

$$\frac{5}{4}y^2-7y-24 = 0$$

Al multiplicar por 4 ambos miembros de la igualdad: $5y^2 - 28y - 96 = 0$

Se resuelve la ecuación: $(y - 8)(5y + 12) = 0$

$$y = 8;\ y = -\frac{12}{5}$$

Se sustituyen estos valores en la relación $x = \frac{1}{2}y$, y se determina que:

Para $y = 8$, $x = 4$ para $y = -\frac{12}{5}$, $x = -\frac{6}{5}$

Por consiguiente, existen 2 puntos que se encuentran a la misma distancia del punto A.

Las coordenadas del punto B son: $B(4, 8)$ y $B\left(-\frac{6}{5},-\frac{12}{5}\right)$.

4 Demuestra por medio de distancias, que los puntos $A(-6,-8)$, $B(0,-4)$ y $C(3,-2)$, están en una misma recta (son colineales).

Solución

Se obtienen las distancias entre los puntos:

$$d_{AB}=\sqrt{(0-(-6))^2+(-4-(-8))^2}=\sqrt{(6)^2+(4)^2}=\sqrt{36+16}=\sqrt{52}$$

$$d_{BC}=\sqrt{(3-0)^2+(-2-(-4))^2}=\sqrt{(3)^2+(2)^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$$

$$d_{AC}=\sqrt{(3-(-6))^2+(-2-(-8))^2}=\sqrt{(9)^2+(6)^2}=\sqrt{81+36}=\sqrt{117}$$

Los puntos son *colineales* si se satisface que la mayor de las distancias obtenidas es igual a la suma de las otras, es decir:

$$d_{AC}=d_{AB}+d_{BC} \qquad \sqrt{117}=\sqrt{52}+\sqrt{13}$$

$$\sqrt{(9)(13)}=\sqrt{(4)(13)}+\sqrt{13}$$

$$3\sqrt{13}=2\sqrt{13}+\sqrt{13}$$

$$3\sqrt{13}=3\sqrt{13}$$

Al cumplirse la condición, se demuestra que los puntos dados son colineales.

EJERCICIO 5

Encuentra la distancia entre los siguientes pares de puntos:

1. $A(-2, -7)$, $B(6, -1)$
2. $A(4, 2)$, $B(5, 0)$
3. $A(0, 2)$, $B(7, 3)$
4. $A(7, 3)$, $B(3, -1)$
5. $A\left(3\sqrt{6}, -2\sqrt{10}\right)$, $B\left(5\sqrt{6}, -4\sqrt{10}\right)$
6. $A\left(3, \frac{1}{2}\right)$, $B\left(\frac{4}{3}, -1\right)$
7. $A\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{6}\right)$, $B\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{6}\right)$
8. $A(-1, 0)$ y $B\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$
9. $A\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$ y $B\left(-\frac{1}{6}, \frac{3}{2}\right)$
10. $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4}\right)$ y $B\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}\right)$

Calcula el perímetro de los triángulos, cuyos vértices son los siguientes puntos:

11. $A(-2, 2)$, $B(7, -1)$ y $C(3, -8)$
12. $J(3, 1)$, $K(2, 7)$ y $L(-1, 6)$
13. $M(1, 2)$, $N(5, 3)$ y $P(-3, -6)$
14. $P(0, 0)$, $Q(0, 4)$ y $R(3, 0)$
15. Verifica que los puntos $A(-2, -3)$, $B(-4, -5)$ y $C(-1, -6)$, son los vértices de un triángulo isósceles.
16. Los extremos del diámetro de una circunferencia son los puntos $A(-2, 3)$ y $B(5, -8)$, ¿cuál es su perímetro y área?
17. La longitud de un segmento es de 13 u y las coordenadas de uno de sus extremos son $A(8, 6)$, obtén la ordenada del otro extremo si su abscisa es -4.
18. El extremo de un segmento de recta es el punto $A(2, -4)$. Si la ordenada del otro extremo es $\frac{3}{2}$ de su abscisa, determina las coordenadas del punto, si la longitud del segmento es de $2\sqrt{26}\ u$.

Mediante la fórmula de la distancia, averigua qué puntos son colineales.

19. $A(-4, -5)$, $B(0, -3)$ y $C(8, 1)$
20. $A(-3, -11)$, $B(1, 3)$ y $C(5, -4)$
21. $A(-3, 3)$, $B\left(1, \frac{1}{3}\right)$ y $C(3, -1)$
22. $A(2, 2)$, $B(-1, 2)$ y $C(3, 3)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

División de un segmento en una razón dada

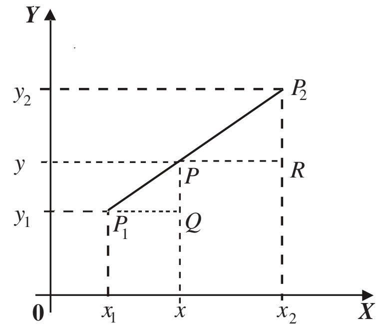
Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ los extremos de un segmento de recta, entonces la razón en que el punto $P(x, y)$ divide al segmento $\overline{P_1P_2}$ en dos partes proporcionales se define como: $r = \dfrac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$.

Por geometría, los triángulos P_1PQ y PP_2R son semejantes, la proporcionalidad que existe entre sus lados es:

$$\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{\overline{P_1Q}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{QP}}{\overline{RP_2}}$$

Por otro lado, $\overline{P_1Q} = x - x_1$, $\overline{PR} = x_2 - x$,

$$\overline{QP} = y - y_1, \overline{RP_2} = y_2 - y$$



Entonces:

$$r=\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}=\frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{y-y_1}{y_2-y}$$

1. Para determinar la razón dados los extremos y el punto de división se emplea:

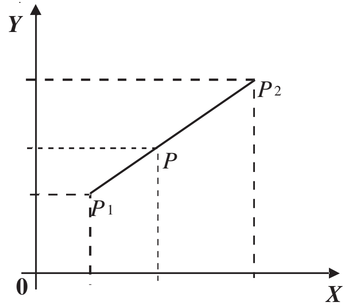
$$r=\frac{x-x_1}{x_2-x} \text{ o } r=\frac{y-y_1}{y_2-y}$$

2. Para encontrar el punto de división dados los extremos y la razón se utiliza:

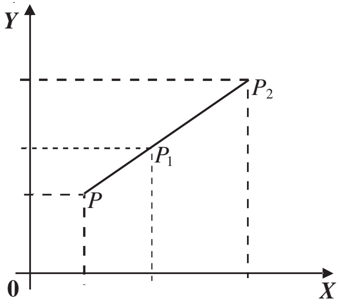
$$x=\frac{x_1+rx_2}{1+r};\ y=\frac{y_1+ry_2}{1+r}$$

El signo de la razón indica si el punto de división se ubica entre los extremos del segmento o fuera de ellos sobre la misma recta.

1. Cuando $P(x, y)$ está en el segmento $\overline{P_1P_2}$, la razón es positiva ($r > 0$).



2. Cuando $P(x, y)$ está en la prolongación del segmento, la razón es negativa ($r < 0$).



EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es la razón en la que el punto $P(2, 7)$ divide al segmento de recta determinado por los puntos $P_1(-1, 1)$ y $P_2(6, 15)$?

Solución

Se sustituyen los valores de $x = 2$, $x_1 = -1$ y $x_2 = 6$, en la fórmula:

$$r=\frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{2-(-1)}{6-2}=\frac{3}{4}$$

Por consiguiente, el valor de la razón es: $\frac{3}{4}$.

Se obtiene el mismo valor de r si se toman los valores de las ordenadas y se sustituyen en la fórmula:

$$r=\frac{y-y_1}{y_2-y}$$

$$r=\frac{7-1}{15-7}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$

2 ¿Cuál es la razón en la que el punto $P(10, 7)$ divide al segmento de la recta, cuyos extremos son los puntos $P_1(-5, 2)$ y $P_2(1, 4)$?

Solución

Se sustituye $y = 7$, $y_1 = 2$ y $y_2 = 4$ en la siguiente fórmula:

$$r=\frac{y-y_1}{y_2-y}$$

Obteniendo:

$$r=\frac{y-y_1}{y_2-y}=\frac{7-2}{4-7}=\frac{5}{-3}=-\frac{5}{3}$$

Esta misma razón se obtiene al sustituir los valores de x.

En consecuencia, la razón es $r=-\frac{5}{3}$, el signo menos indica que el punto P se encuentra sobre la recta que pasa por los puntos P_1 y P_2, pero no entre ellos.

3 Determina las coordenadas del punto $P(x, y)$ que divide al segmento $\overline{P_1P_2}$ en una razón $r = -\frac{2}{7}$, y cuyos extremos son los puntos $P_1(0, 3)$ y $P_2(7, 4)$.

Solución

Se sustituyen los valores en las respectivas fórmulas y se obtiene la coordenada de P:

$$x = \frac{0+\left(-\frac{2}{7}\right)(7)}{1+\left(-\frac{2}{7}\right)} = \frac{-\frac{2}{1}}{\frac{5}{7}} = -\frac{14}{5} \qquad y = \frac{3+\left(-\frac{2}{7}\right)(4)}{1+\left(-\frac{2}{7}\right)} = \frac{3-\frac{8}{7}}{1-\frac{2}{7}} = \frac{\frac{21-8}{7}}{\frac{7-2}{7}} = \frac{\frac{13}{7}}{\frac{5}{7}} = \frac{13}{5}$$

Por tanto, el punto de división tiene como coordenadas $P\left(-\frac{14}{5}, \frac{13}{5}\right)$.

4 Para los puntos $P_1(5, 3)$ y $P_2(-3, -3)$, encuentra la coordenada del punto $P(x, y)$ que divide al segmento de recta en la razón $r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$, de tal manera que la distancia de P a P_1 sea el triple de la que existe a P_2 y se encuentra entre P_1 y P_2.

Solución

En este caso $r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{3}{1} = 3$, al sustituir en la fórmula:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r} = \frac{5+3(-3)}{1+3} = \frac{-4}{4} = -1\ ; \quad y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r} = \frac{3+3(-3)}{1+3} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

Entonces, las coordenadas del punto de división son $P\left(-1, -\frac{3}{2}\right)$.

5 Dados los puntos $P_1(4, -3)$ y $P_2(1, 4)$, determina la coordenada del punto $P(x, y)$ que divide al segmento de recta en la razón $r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$, de tal manera que la distancia de P a P_1 es el doble de la que existe a P_2 y se encuentra entre P_1 y P_2.

Solución

Según las condiciones del problema se establece que $r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{2}{1} = 2$, luego al sustituir en la fórmula se determina que:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r} = \frac{4+2(1)}{1+2} = \frac{4+2}{3} = \frac{6}{3} = 2; \quad y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r} = \frac{-3+2(4)}{1+2} = \frac{-3+8}{3} = \frac{5}{3}$$

Por consiguiente, las coordenadas del punto de división son $P\left(2, \frac{5}{3}\right)$.

EJERCICIO 6

Determina la razón $r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$ en que el punto P divide al segmento de recta de extremos P_1 y P_2.

1. $P_1(0, 2)$, $P_2(-2, 4)$ y $P(2, 0)$
2. $P_1(-1, 4)$, $P_2(0, 3)$ y $P(3, 0)$
3. $P_1(3, -4)$, $P_2(0, 2)$ y $P(2, -2)$
4. $P_1(3, 5)$, $P_2(-1, 4)$ y $P(-5, 3)$
5. $P_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$, $P_2(2, 1)$ y $P\left(\frac{1}{3}, \frac{13}{18}\right)$
6. $P_1(-5, 1)$, $P_2(4, 3)$ y $P\left(-3, \frac{13}{9}\right)$

Dados los extremos P_1, P_2 y la razón $r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$, encuentra las coordenadas del punto de división P del segmento $\overline{P_1P_2}$.

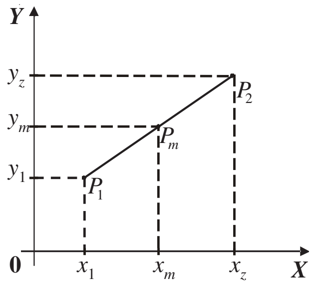
7. $P_1(4, 1)$, $P_2(5, -2)$ y $r = -2$
8. $P_1(0, 5)$, $P_2(6, -1)$ y $r = 5$
9. $P_1(-2, 3)$, $P_2(4, 5)$ y $r = \frac{2}{3}$
10. $P_1\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$, $P_2(0, 4)$ y $r = \frac{1}{2}$
11. $P_1(5, -6)$, $P_2(1, 0)$ y $r = \frac{1}{3}$
12. $P_1(a, 2b)$, $P_2(-3a, 4b)$ y $r = 1$
13. Los puntos extremos de un segmento de recta son $P_1(-2, 4)$ y $P_2(1, -2)$, determina la razón $r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$ en la que el punto $P(3, -6)$ divide al segmento.
14. Si el punto $P(x, y)$ está a una distancia cuatro veces mayor a $P_1(-5, -3)$ que a $P_2(6, 10)$ y queda entre P_1 y P_2, encuentra las coordenadas de P.
15. Sean $P_1(6, -8)$ y $P_2(4, 2)$, los extremos de un segmento $\overline{P_1P_2}$, el cual se prolonga hasta P, de tal manera que la longitud de $\overline{P_1P}$ sea tres veces la longitud de $\overline{PP_2}$, encuentra las coordenadas de P.
16. Un punto $P(-14, -4)$ está entre $P_1(-6, 4)$ y $P_2(-18, -8)$. ¿En qué razón divide P al segmento $\overline{P_1P_2}$?
17. Dados los puntos $P_1(-2, -3)$ y $P_2(4, 3)$, ¿cuáles son las coordenadas del punto $P(x, y)$ que divide al segmento de recta en la razón $r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$, de tal manera que la distancia de P a P_1 sea el doble de distancia que a P_2 y se encuentra entre P_1 y P_2?
18. Dados los puntos $P_1(-1, 2)$ y $P_2(3, -3)$, obtén las coordenadas del punto $P(x, y)$ que está colocado fuera del segmento $\overline{P_1P_2}$ y que se encuentran a una distancia tres veces mayor a P_1 que a P_2.
19. Puesto que el punto (3, 2) divide al segmento de recta que determinan los puntos $P_1(2, 4)$ y $P_2(x_2, y_2)$ en la relación $r = \frac{3}{2}$, determina las coordenadas de P_2.
20. Si $P_1(-2, -1)$ y $P_2(4, 5)$ son extremos del segmento $\overline{P_1P_2}$, encuentra las coordenadas del punto $P(x, y)$ que divide al segmento de recta, de tal manera que la longitud de $\overline{P_1P}$ sea $\frac{2}{3}$ de la longitud de $\overline{PP_2}$.
21. Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ extremos de un segmento de recta, determina el valor de la razón r para que el punto $P(x, y)$ divida al segmento en partes iguales, y deduce las coordenadas del punto medio.
22. Deduce las coordenadas de los puntos de trisección (que dividen en tres partes iguales) del segmento $\overline{P_1P_2}$ determinado por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Punto medio de un segmento de recta

El punto medio del segmento de recta con extremos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, es aquel punto $P_m(x_m, y_m)$ que lo divide en dos segmentos iguales.

Si el punto $P_m = P$ divide a $\overline{P_1P_2}$ en dos segmentos de recta iguales, entonces: $\overline{P_1P} = \overline{PP_2}$



$$r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{\overline{PP_2}}{\overline{PP_2}} = 1$$

Por tanto, las coordenadas del punto medio son:

$$P_m\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina las coordenadas del punto medio del segmento, cuyos extremos son los puntos $P_1(5, 7)$ y $P_2(1, -3)$

Solución

Se sustituye $x_1 = 5$, $y_1 = 7$ y $x_2 = 1$, $y_2 = -3$, en las fórmulas:

$$x_m = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3\,; \quad y_m = \frac{y_1+y_2}{2} = \frac{7+(-3)}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

En consecuencia, el punto medio tiene coordenadas: $P_m(3, 2)$.

2 Uno de los extremos de un segmento de recta es el punto (3, 2) y su punto medio es el punto (– 3, 5). Encuentra las coordenadas del otro extremo.

Solución

Conocidos los puntos $P_1(3, 2)$ y $P_m(-3, 5)$, se sustituyen los valores de las abscisas y las ordenadas en sus respectivas fórmulas y se realizan los despejes:

$$-3 = \frac{3+x_2}{2} \qquad\qquad 5 = \frac{2+y_2}{2}$$

$$(-3)(2) = 3 + x_2 \qquad\qquad (5)(2) = 2 + y_2$$

$$-6 = 3 + x_2 \qquad\qquad 10 = 2 + y_2$$

$$-6 - 3 = x_2 \qquad\qquad 10 - 2 = y_2$$

$$-9 = x_2 \qquad\qquad 8 = y_2$$

Entonces, se determina que las coordenadas del extremo P_2 son: (– 9, 8).

Puntos de trisección de un segmento de recta

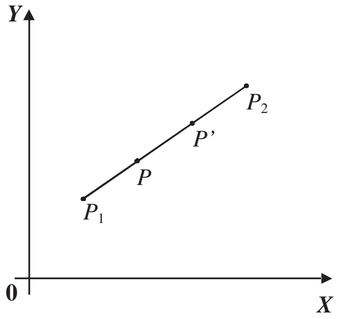
Los puntos de trisección P y P' del segmento de recta, cuyos extremos son los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son aquellos que lo dividen en tres partes iguales.

Para el punto P la razón es $\frac{1}{2}$ y sus coordenadas son:

$$P\left(\frac{2x_1+x_2}{3}, \frac{2y_1+y_2}{3}\right)$$

Para el punto P' la razón es 2 y sus coordenadas son:

$$P'\left(\frac{x_1+2x_2}{3}, \frac{y_1+2y_2}{3}\right)$$



EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos de trisección del segmento de recta determinado por los puntos $P_1(-6, 2)$ y $P_2(3, 5)$?

Solución

Al sustituir los valores de las abscisas y ordenadas en las fórmulas se obtienen los puntos:

$$P\left(\frac{2(-6)+3}{3}, \frac{2(2)+5}{3}\right);\ P'\left(\frac{-6+2(3)}{3}, \frac{2+2(5)}{3}\right)$$

$$P(-3, 3);\ P'(0, 4)$$

Por tanto, los puntos de trisección del segmento de recta son $P(-3, 3)$ y $P'(0, 4)$.

EJERCICIO 7

Determina las coordenadas del punto medio y de los puntos de trisección de los segmentos de recta definidos por los puntos:

1. $P_1(3, 5)$, $P_2(2, -1)$
2. $P_1(0, 4)$, $P_2(3, 7)$
3. $P_1(-1, 3)$, $P_2(9, 11)$
4. $P_1(5, -7)$, $P_2(11, -4)$
5. $P_1\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $P_2\left(\frac{1}{3}, 2\right)$
6. $P_1\left(\frac{2}{3}, -2\right)$, $P_2\left(\frac{1}{4}, 1\right)$
7. Si el punto medio de un segmento de recta es $P_m(1, -3)$ y un extremo del segmento es $P_1(7, -1)$, ¿cuál es la coordenada del otro extremo?
8. Los puntos medios de los lados de un triángulo son $(-2, 3)$, $(2, 7)$, $(3, 5)$. Encuentra las coordenadas de los vértices.
9. Los vértices de un triángulo son $A(-4, 1)$, $B(2, 7)$ y $C(-2, -3)$. Si D es el punto medio del $\overline{AB}$ y E es el punto medio del lado $\overline{BC}$, demuestra que la longitud del $\overline{DE}$ es la mitad de la longitud del $\overline{AC}$.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

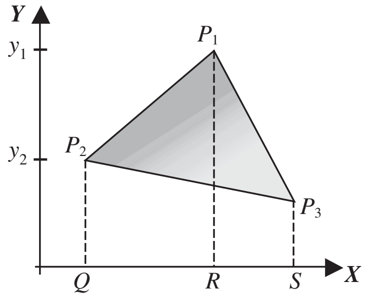
Área de un triángulo

Para el triángulo con vértices en los puntos $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ y $P_3(x_3, y_3)$, su área o superficie A se determina con la fórmula:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left| x_1\left(y_2 - y_3\right) + x_2\left(y_3 - y_1\right) + x_3\left(y_1 - y_2\right)\right|$$

Demostración

En la figura el área A del triángulo $P_1P_2P_3$ es igual al valor absoluto de la suma de las áreas de los trapecios P_1P_2QR y P_1RSP_3 menos el área del trapecio P_2QSP_3 siendo el área de un trapecio:



$$A_t = \frac{(b+B)h}{2}$$

Entonces:

$$A = \left|\frac{(y_1+y_2)(x_1-x_2)}{2} + \frac{(y_1+y_3)(x_3-x_1)}{2} - \frac{(y_2+y_3)(x_3-x_2)}{2}\right|$$

$$A = \left|\frac{(y_1+y_2)(x_1-x_2)}{2} + \frac{(y_1+y_3)(x_3-x_1)}{2} + \frac{(y_2+y_3)(x_2-x_3)}{2}\right|$$

$$A = \left|\frac{x_1(y_1+y_2-y_1-y_3)+x_2(y_2+y_3-y_1-y_2)+x_3(y_1+y_3-y_2-y_3)}{2}\right|$$

$$A = \frac{1}{2}\left|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right|$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es el área del triángulo, cuyos vértices son los puntos $A(-3, 2)$, $B(4, 5)$ y $C(2, -2)$?

Solución

Al aplicar la fórmula:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 5 \\ 2 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left|-3(5+2)+4(-2-2)+2(2-5)\right| = \frac{1}{2}\left|-21-16-6\right| = \frac{1}{2}(43) = 21.5u^2$$

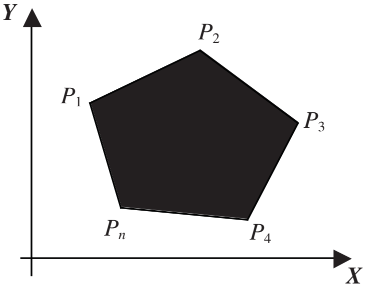
Donde u^2 son unidades cuadradas de superficie.

Por consiguiente, el área del ΔABC es 21.5 u^2.

Área de un polígono

El área A de un polígono con vértices en: $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$, es igual a la suma de las áreas de todos los triángulos que se puedan trazar en él desde un solo vértice. Este procedimiento para determinar su área, se reduce al determinante definido como:

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$



EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el área del cuadrilátero, cuyos vértices son los puntos $A(-2, 5)$, $B(0, -1)$ $C(2, -6)$ y $D(-4, -3)$.

Solución

Se sustituyen los puntos en la fórmula:

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 0 & -1 \\ 2 & -6 \\ -4 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left| 2+0-6-20-6-24+2-0\right| = \frac{1}{2}(52) = 26$$

En consecuencia, el área del cuadrilátero es de 26 u^2.

2 Determina el área del pentágono, cuyos vértices son los puntos $A(-1, 2)$, $B(3, 4)$, $C(4, 6)$, $D(2, -1)$ y $E(0, -3)$.

Solución

Se sustituyen los puntos en la fórmula:

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 6 \\ 2 & -1 \\ 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left| -4+18-4-6+0-3-0-12-16-6\right| = \frac{1}{2}(33) = 16.5$$

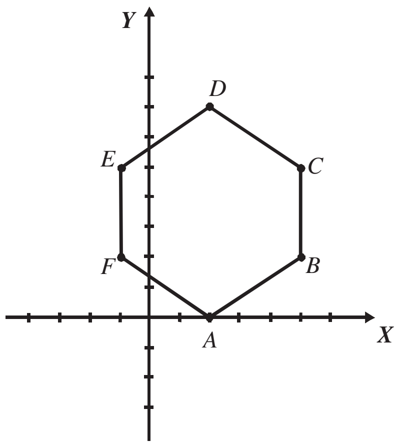
Finalmente, el área del pentágono es de 16.5 u^2.

3 Calcula el área del hexágono, cuyos vértices son los puntos $A(2, 0)$, $B(5, 2)$, $C(5, 5)$, $D(2, 7)$, $E(-1, 5)$ y $F(-1, 2)$.

Solución

Para desarrollar el determinante del área se colocan las coordenadas de los vértices y se repite la primera de ellas:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 2 \\ 5 & 5 \\ 2 & 7 \\ -1 & 5 \\ -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$



$$A = \frac{1}{2}\left|4 + 25 + 35 + 10 - 2 - 10 - 10 + 7 + 5 - 4\right|$$

$$A = \frac{1}{2}(60)$$

$$A = 30u^2$$

Por consiguiente, el hexágono tiene una superficie de 30 u^2.

EJERCICIO 8

Determina el área de los siguientes polígonos definidos por los puntos:

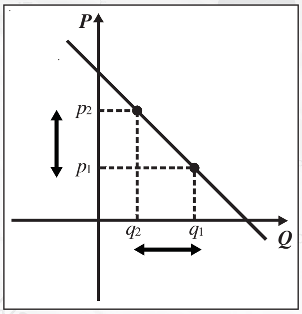
1. $A(1, 3)$, $B(0, 0)$ y $C(2, 0)$
2. $A(-4, -5)$, $B(2, 1)$ y $C(-1, 3)$
3. $A(6, 2)$, $B(-1, 7)$ y $C(-4, 1)$
4. $A(3, 1)$, $B(7, 3)$ y $C(1, 5)$
5. $A(-4, 0)$, $B(0, 0)$ y $C(0, -3)$
6. $A(a, 0)$, $B(-a, 0)$ y $C(0, a)$
7. $A(-6, -2)$, $B(4, 3)$, $C(5, 5)$ y $D(5, -2)$
8. $A(-3, 1)$, $B(-2, 5)$, $C(2, 4)$ y $D(1, 0)$
9. $A(-4, 1)$, $B(-2, 4)$, $C(5, 5)$ y $D(3, 2)$
10. $A(-7, 1)$, $B(-5, 4)$, $C(2, 3)$, $D(0, -5)$ y $E(-4, -3)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Capítulo 3

Pendiente de una recta

Oferta y DEMANDA



Curva de demanda lineal

En la práctica algunas ecuaciones de oferta y demanda son aproximadamente lineales en un intervalo.

En el análisis económico sólo se toma la porción de las rectas lineales que se encuentran en el primer cuadrante, ya que la oferta, el precio y la demanda son cero o positivas.

Curva de demanda lineal

Caso I

Cuando la pendiente de la recta es negativa aumenta el precio y la cantidad de demanda disminuye y viceversa.

Caso II

Cuando la pendiente de la recta es cero el precio permanece constante, sin considerar que la demanda aumenta.

Caso III

Cuando la pendiente de la recta no existe el precio aumenta y la cantidad de demanda permanece constante.

P: Precio

Q: Cantidad de demanda

Definiciones

Inclinación de una recta. Es el ángulo que una recta forma con el eje X positivo, el cual se representa con el símbolo θ, este ángulo se mide a partir del eje X y girando en sentido opuesto a las manecillas del reloj.

Pendiente de una recta. Se define como la tangente del ángulo de inclinación que tiene una recta y se representa con la letra m.

$$m = \tan \theta$$

Donde:

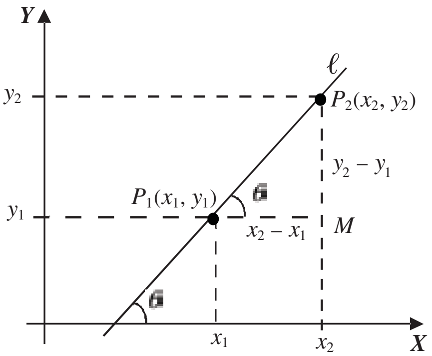
$$\theta = \arc\tan (m) \text{ si } m > 0 \qquad \theta = \arc\tan (m) + 180° \text{ si } m < 0$$

Pendiente de una recta que pasa por dos puntos

Sea la recta ℓ que pasa por los puntos P_1 y P_2, entonces su pendiente se define como:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Demostración



La pendiente de la recta ℓ es,

$$m = \tan \theta$$

En el triángulo P_1MP_2,

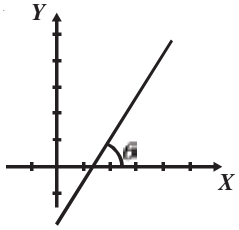
$$\tan \theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Por consiguiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

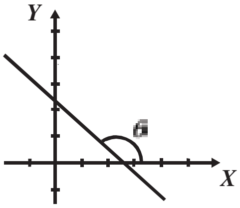
Los casos que se presentan para el valor de la pendiente y su ángulo de inclinación, son los siguientes:

1. Si $m > 0$ (positiva) entonces, el ángulo es agudo.



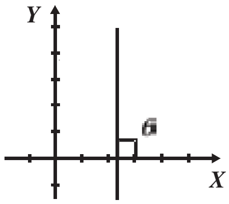
Si $m > 0$, entonces, $0° < \theta < 90°$

2. Si $m < 0$ (negativa) entonces, el ángulo es obtuso.

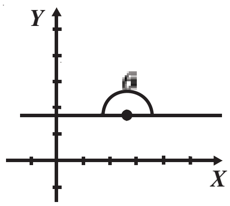


Si $m < 0$, entonces, $90° < \theta < 180°$

3. Si $m = \frac{c}{0}$ entonces, el ángulo es recto.



4. Si $m = 0$, el ángulo es llano.



EJEMPLOS

Ejemplos

1 Una recta pasa por los puntos $A(-2, -1)$ y $B(3, 4)$. Determina su pendiente y el ángulo de inclinación.

Solución

Se sustituyen los valores de las abscisas y ordenadas en la fórmula: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$m = \frac{4-(-1)}{3-(-2)} = \frac{4+1}{3+2} = \frac{5}{5} = 1$$

Luego, si $m = 1$ entonces, $tan\ \theta = 1$, en consecuencia:

$$\theta = arc\ tan\ (1) = 45°$$

Por consiguiente, $m = 1$ y $\theta = 45°$.

2 Calcula la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos $P(1, 4)$ y $Q(7, -3)$.

Solución

Al sustituir los valores en $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, se obtiene:

$$m = \frac{-3-4}{7-1} = -\frac{7}{6}$$

Como $m = -\frac{7}{6}$, entonces, el ángulo de inclinación es:

$$\theta = arc\ tan\left(-\frac{7}{6}\right) + 180° = -49°\ 23' + 180° = 130°\ 37'$$

Por tanto, el valor de la pendiente es $-\frac{7}{6}$ y el del ángulo de inclinación 130° 37'.

3 Verifica si los puntos $A(-2, 4)$, $B(0, 1)$ y $C(4, -5)$ son colineales, aplica la fórmula de la pendiente.

Solución

Para verificar que tres puntos son colineales se debe de cumplir que:

$$m_{AB} = m_{BC} = m_{AC}$$

Por consiguiente, se obtiene la pendiente de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$

$$\text{Pendiente del segmento } \overline{AB} \Rightarrow m_{AB} = \frac{1-4}{0-(-2)} = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Pendiente del segmento } \overline{BC} \Rightarrow m_{BC} = \frac{-5-1}{4-0} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Pendiente del segmento } \overline{AC} \Rightarrow m_{AC} = \frac{-5-4}{4-(-2)} = \frac{-9}{6} = -\frac{3}{2}$$

Se observa que las pendientes de los segmentos son iguales, en consecuencia los puntos son colineales.

4 La pendiente de una recta es -4 y pasa por el punto $A(1, 5)$. Si la abscisa del punto B es -2, ¿cuál es su ordenada?

Solución

Se sabe que x = abscisa, y = ordenada, por tanto, los datos son:

$$m = -4,\ A(1, 5) \text{ y } B(-2, y)$$

Se sustituyen los valores anteriores en la fórmula: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y se despeja y.

$$-4 = \frac{y-5}{-2-1} \quad \rightarrow \quad -4 = \frac{y-5}{-3} \quad \rightarrow \quad (-4)(-3) + 5 = y \quad \rightarrow \quad y = 17$$

Finalmente, el punto B tiene como coordenadas $(-2, 17)$.

5 El ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos $P_1(-1,5)$ y $P_2(x,1)$ con el eje X es de 135°. ¿Cuál es el valor de la abscisa de P_2?

Solución

Se obtiene la pendiente de la recta:

$$m = \tan 135°$$
$$m = -1$$

Se sustituyen los valores de la pendiente, las abscisas y ordenadas en la fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad -1 = \frac{1-5}{x-(-1)}$$

$$-1 = \frac{-4}{x+1}$$

Se despeja x:

$$-1(x+1) = -4$$

$$x + 1 = \frac{-4}{-1}$$

$$x = 4 - 1$$

$$x = 3$$

Por consiguiente, el valor de la abscisa de P_2 es 3.

EJERCICIO 9

Determina la pendiente de los siguientes pares de puntos:

1. $A(-3, 5)$ y $B(2, 7)$
2. $A(-1, 2)$ y $B(4, -5)$
3. $A(8, -2)$ y $B(0, -1)$
4. $A(0, 4)$ y $B(-3, 0)$
5. $A(-5, 1)$ y $B(1, -3)$
6. $A(4, -2)$ y $B(7, -2)$
7. $A\left(5, \sqrt{3}\right)$ y $B(5, 1)$
8. $A\left(\frac{1}{2}, 7\right)$ y $B\left(3, -\frac{3}{2}\right)$
9. $A\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{3}\right)$ y $B\left(-\frac{3}{5}, \frac{3}{4}\right)$
10. $A\left(\frac{a}{b}, 1\right)$ y $B(a, b)$

Encuentra la medida de los ángulos de inclinación de las rectas que pasan por los siguientes puntos:

11. $P(5, 7)$ y $Q(2, 4)$
12. $A(-1, 2)$ y $B(-2, 3)$
13. $A\left(\sqrt{3}, 3\right)$ y $B(0, 2)$
14. $R\left(3, \sqrt{2}\right)$ y $S(1, 0)$
15. $S(7, -1)$ y $T(7, 4)$
16. $Q(4, -5)$ y $R(-2, -5)$

Aplica el concepto de pendiente para saber cuáles de los siguientes puntos son colineales.

17. $A(1, 2)$, $B(2, 4)$ y $C(-1, -2)$
18. $A(-2, 2)$, $B(1, 3)$ y $C(-5, 1)$
19. $A(-1, 4)$, $B(3, 0)$ y $C(0, 3)$
20. $A(5, 1)$, $B(3, 4)$ y $C(2, 7)$
21. $A(0, 2)$, $B(-2, 4)$ y $C(2, 0)$
22. $A(3, -4)$, $B(2, -2)$ y $C(0, -1)$
23. $A(x, 2)$, $B(2x, 2 - y)$ y $C(0, 2 + y)$
24. $A(a, b)$, $B(2a + b, a)$ y $C(-b, 2b - a)$
25. La pendiente de una recta es 3. Si la recta pasa por los puntos $A(2, -1)$ y el punto B, cuya ordenada es -5, ¿cuál es el valor de su abscisa?
26. Una recta tiene un ángulo de inclinación de 45° y pasa por los puntos A y B. Si el punto A tiene coordenadas $(3, -2)$ y la ordenada de B es -1, encuentra su abscisa.
27. El ángulo de inclinación de una recta es de 60° y pasa por los puntos $A\left(2, 3\sqrt{3}\right)$ y B, cuya abscisa es $-\sqrt{3}$, ¿cuál es la ordenada de B?
28. Una recta forma un ángulo de 30° con el eje X y pasa por los puntos $A\left(3\sqrt{3}, -1\right)$ y $B\left(-2\sqrt{3}, y\right)$. Calcula el valor de la ordenada de B.

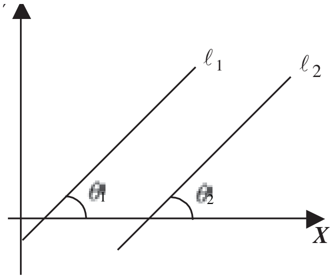
Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Condición de paralelismo

Dos rectas son paralelas si sus ángulos de inclinación son iguales y, por tanto, sus pendientes también.

$$m_1 = m_2$$

Se denota como $\ell_1 \parallel \ell_2$ para indicar que ℓ_1 es paralela a ℓ_2



Si $\ell_1 \parallel \ell_2$, entonces

$$\theta_1 = \theta_2$$

Por ser correspondientes.

Aplicando la función tangente

$$\tan \theta_1 = \tan \theta_2$$

Finalmente, se determina que:

$$m_1 = m_2$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Demuestra que la recta ℓ_1, que pasa por los puntos $A(1, 1)$ y $B(5, 3)$ es paralela a la recta ℓ_2 que pasa por los puntos $C(8, 0)$ y $D(4, -2)$.

Solución

Se obtienen las pendientes de ambas rectas:

$$m_{AB} = \frac{3-1}{5-1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\ ;\ m_{CD} = \frac{-2-0}{4-8} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

Como $m_{AB} = m_{CD}$, entonces se demuestra que $\ell_1 \parallel \ell_2$.

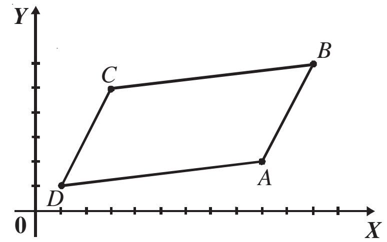
2 Demuestra que los puntos $A(9, 2)$, $B(11, 6)$, $C(3, 5)$ y $D(1, 1)$, son vértices de un paralelogramo.

Solución

Se determinan las pendientes de los lados:

$$m_{AB} = \frac{6-2}{11-9} = \frac{4}{2} = 2\ ;\ m_{BC} = \frac{5-6}{3-11} = \frac{-1}{-8} = \frac{1}{8}$$

$$m_{CD} = \frac{1-5}{1-3} = \frac{-4}{-2} = 2\ ;\ m_{AD} = \frac{1-2}{1-9} = \frac{-1}{-8} = \frac{1}{8}$$



Se observa que $m_{AB} = m_{CD}$ y $m_{BC} = m_{AD}$, por tanto, se deduce que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$.

Como los lados opuestos son paralelos, entonces la figura es un paralelogramo.

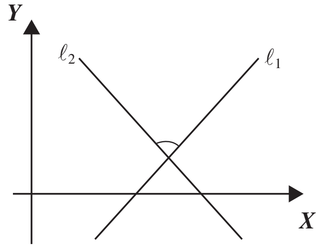
Condición de perpendicularidad

Dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es igual a – 1.

Si $\ell_1 \perp \ell_2$ (ℓ_1 es perpendicular a ℓ_2), es decir, las rectas forman un ángulo de 90°, entonces:

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

Por tanto, $m_1 = -\frac{1}{m_2}$ o $m_2 = -\frac{1}{m_1}$



EJEMPLOS

1 Demuestra que la recta ℓ_1, que pasa por los puntos $A(2, 5)$ y $B(7, 3)$, es perpendicular a la recta ℓ_2, que pasa por los puntos $C(-1,-2)$ y $D(1, 3)$.

Solución

Se obtienen las pendientes de las rectas.

Pendiente de la recta ℓ_1:

$$m_{AB}=\frac{3-5}{7-2}=-\frac{2}{5}$$

Pendiente de la recta ℓ_2:

$$m_{CD}=\frac{3-(-2)}{1-(-1)}=\frac{3+2}{1+1}=\frac{5}{2}$$

Ahora se aplica la condición:

$$\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(\frac{5}{2}\right)=-1$$

Se demuestra que la recta ℓ_1 es perpendicular a la recta ℓ_2.

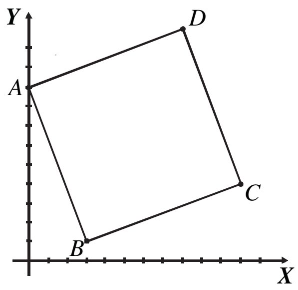
2 Demuestra que los lados adyacentes del cuadrilátero, cuyos vértices son los puntos $A(0, 9)$, $B(3, 1)$, $C(11, 4)$ y $D(8, 12)$, son perpendiculares entre sí.

Solución

Se determinan las pendientes de los lados:

$$m_{AB}=\frac{1-9}{3-0}=\frac{-8}{3}=-\frac{8}{3} \qquad m_{BC}=\frac{4-1}{11-3}=\frac{3}{8} \qquad m_{CD}=\frac{12-4}{8-11}=-\frac{8}{3} \qquad m_{AD}=\frac{12-9}{8-0}=\frac{3}{8}$$

En la figura:



Se observa que los lados adyacentes son:

$$\overline{AB} \text{ y } \overline{BC};\ \overline{BC} \text{ y } \overline{CD};\ \overline{CD} \text{ y } \overline{AD};\ \overline{AD} \text{ y } \overline{AB}$$

Ahora se multiplican las pendientes de los lados adyacentes para demostrar que son perpendiculares:

$$m_{AB}\cdot m_{BC}=\left(-\frac{8}{3}\right)\left(\frac{3}{8}\right)=-1 \qquad m_{CD}\cdot m_{AD}=\left(-\frac{8}{3}\right)\left(\frac{3}{8}\right)=-1$$

$$m_{BC}\cdot m_{CD}=\left(\frac{3}{8}\right)\left(-\frac{8}{3}\right)=-1 \qquad m_{AD}\cdot m_{AB}=\left(\frac{3}{8}\right)\left(-\frac{8}{3}\right)=-1$$

De aquí se determina que:

$$\overline{AB}\perp\overline{BC},\ \overline{BC}\perp\overline{CD},\ \overline{CD}\perp\overline{AD} \text{ y } \overline{AD}\perp\overline{AB}$$

Entonces, se demuestra que los lados adyacentes son perpendiculares entre sí.

EJERCICIO 10

1. Averigua si la recta ℓ_1 que pasa por los puntos $A(3, -1)$ y $B(-6, 5)$ es paralela o perpendicular a la recta ℓ_2 que pasa por los puntos $C(0, 2)$ y $D(-2, -1)$.
2. Comprueba por medio de pendientes que los puntos $A(1, 3)$, $B(2, 6)$, $C(7, 8)$ y $D(6, 5)$, son vértices de un paralelogramo.
3. Demuestra que la recta que pasa por los puntos $A(-2, 1)$ y $B(1, -4)$, es paralela a la recta que pasa por los puntos $C(8, -7)$ y $D(5, -2)$.
4. Comprueba por medio de pendientes que los puntos $A(3, 1)$, $B(7, 3)$ y $C(1, 5)$, son los vértices de un triángulo rectángulo.
5. Demuestra que los cuatro puntos $A(-3, 1)$, $B(-2, 5)$, $C(2, 4)$ y $D(1, 0)$, son vértices de un cuadrado y que sus diagonales son perpendiculares.
6. Una recta ℓ_1 pasa por los puntos $(-2, -1)$ y $(2, 3)$, y otra recta ℓ_2 pasa por el punto $(-1, 2)$ y el punto A, cuya ordenada es -4. Determina la abscisa del punto A cuando ℓ_1 es perpendicular a ℓ_2.
7. Demuestra por medio de pendientes que los puntos $A(-2, -1)$, $B(-4, 3)$, $C(3, 5)$ y $D(5, 1)$, son vértices de un paralelogramo.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Ángulo entre dos rectas

Para encontrar el ángulo θ formado por las rectas ℓ_1 y ℓ_2 se utiliza la fórmula:

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

Por geometría: $\beta = \alpha + \theta$ y $\theta = \beta - \alpha$

Aplicando tangente: $\tan\theta = \tan(\beta - \alpha)$

$$\tan\theta = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta \cdot \tan\alpha}$$

Pero $\tan\beta = m_2$ y $\tan\alpha = m_1$

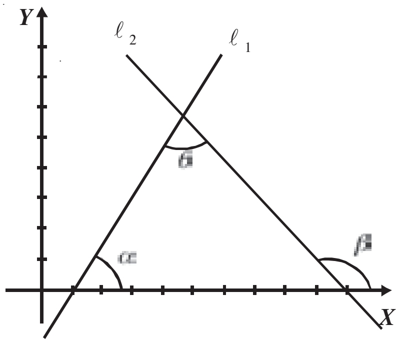
Entonces, $\tan\theta = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$

Donde:

θ: Ángulo entre las rectas

m_1: pendiente inicial de la recta ℓ_1

m_2: pendiente final de la recta ℓ_2



Se debe de tomar en cuenta que los ángulos se miden en sentido contrario a las manecillas del reloj; en la recta que inicie el ángulo, será la pendiente inicial, y en la recta que termine, la pendiente final.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la medida del ángulo obtuso que forman las rectas, cuyas pendientes son 2 y – 3.

Solución

En este caso no importa cuál sea la pendiente inicial o final, se escoge $m_1 = 2$ y $m_2 = -3$, se sustituyen en la fórmula y se obtiene:

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{-3-2}{1+(-3)(2)} = \frac{-5}{1-6} = \frac{-5}{-5} = 1$$

De aquí, $\tan\theta = 1$ entonces: $\theta = \arctan(1) = 45°$.

El ángulo obtuso ϕ se determina al calcular el suplemento de θ

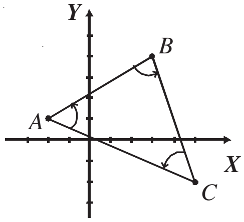
$$45° + \phi = 180°$$
$$\phi = 180° - 45°$$
$$\phi = 135°$$

En consecuencia, el ángulo que se busca es igual a 135°.

2 ¿Cuál es la medida de los ángulos interiores del triángulo determinado por los puntos $A(-2, 1)$, $B(3, 4)$ y $C(5, -2)$?

Solución

Se grafica el triángulo en el plano cartesiano y se ubican para cada ángulo las pendientes inicial y la final.



Para el ángulo A: $m_1 = m_{AC}$; $m_2 = m_{AB}$

Para el ángulo B: $m_1 = m_{AB}$; $m_2 = m_{BC}$

Para el ángulo C: $m_1 = m_{BC}$; $m_2 = m_{AC}$

Se obtienen las pendientes de los lados del triángulo:

$$m_{AB} = \frac{4-1}{3-(-2)} = \frac{3}{5} \qquad m_{BC} = \frac{-2-4}{5-3} = \frac{-6}{2} = -3 \qquad m_{AC} = \frac{-2-1}{5-(-2)} = -\frac{3}{7}$$

Se aplica la fórmula para cada uno de los ángulos, tomando como referencia las pendientes inicial y final.

$$\tan A = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{\frac{3}{5} - \left(-\frac{3}{7}\right)}{1 + \left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{3}{7}\right)} = \frac{\frac{3}{5} + \frac{3}{7}}{1 - \frac{9}{35}} = \frac{\frac{21+15}{35}}{\frac{35-9}{35}} = \frac{\frac{36}{35}}{\frac{26}{35}} = \frac{(35)(36)}{(35)(26)} = \frac{36}{26} = \frac{18}{13}$$

$$\tan B = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{-3 - \frac{3}{5}}{1 + (-3)\left(\frac{3}{5}\right)} = \frac{-3 - \frac{3}{5}}{1 - \frac{9}{5}} = \frac{\frac{-15-3}{5}}{\frac{5-9}{5}} = \frac{-\frac{18}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{(5)(-18)}{(5)(-4)} = \frac{-18}{-4} = \frac{9}{2}$$

$$\tan C = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{-\frac{3}{7} - (-3)}{1 + \left(-\frac{3}{7}\right)(-3)} = \frac{-\frac{3}{7} + 3}{1 + \frac{9}{7}} = \frac{\frac{-3+21}{7}}{\frac{7+9}{7}} = \frac{\frac{18}{7}}{\frac{16}{7}} = \frac{(7)(18)}{(7)(16)} = \frac{18}{16} = \frac{9}{8}$$

Finalmente, los ángulos son:

$$A = \arctan\left(\frac{18}{13}\right) = 54°\ 9'\ 44'' \qquad B = \arctan\left(\frac{9}{2}\right) = 77°\ 28'16''$$

$$C = \arctan\left(\frac{9}{8}\right) = 48°\ 21'59''$$

Para comprobar los resultados se suman los ángulos interiores y el resultado debe ser 180°

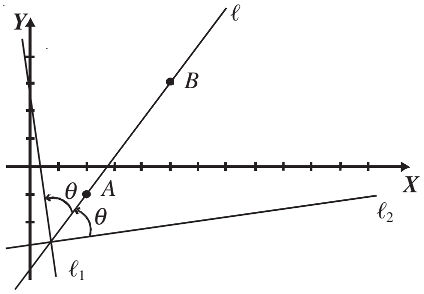
$$A + B + C = 180° \qquad 54°\ 9'\ 44'' + 77°\ 28'\ 16'' + 48°\ 21'\ 59'' = 180°$$
$$180° = 180°$$

3 ¿Cuál es la pendiente de la recta que forma un ángulo de 45°, con la recta que pasa por los puntos de coordenadas $A(2, -1)$ y $B(5, 3)$?

Solución

Existen dos rectas que forman un ángulo de 45° con la recta ℓ, por consiguiente, se tienen 2 casos:

1. La pendiente ℓ es inicial
2. La pendiente ℓ es final



Se obtiene la pendiente ℓ que pasa por los puntos A y B:

$$m_{AB} = \frac{3-(-1)}{5-2} = \frac{4}{3}$$

Cuando la pendiente ℓ es inicial, se debe de encontrar m_2, entonces:

$$tan\ \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \quad \rightarrow \quad tan\ 45° = \frac{m_2 - \frac{4}{3}}{1 + \left(\frac{4}{3}\right)m_2} \quad \rightarrow \quad 1 = \frac{\frac{3m_2 - 4}{3}}{\frac{3 + 4m_2}{3}}$$

$$1 = \frac{3m_2 - 4}{3 + 4m_2}$$

$$3 + 4m_2 = 3m_2 - 4$$

$$4m_2 - 3m_2 = -4 - 3$$

$$m_2 = -7$$

Cuando la pendiente ℓ es final, se debe de encontrar m_1, por consiguiente:

$$tan\ \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \quad \rightarrow \quad tan\ 45° = \frac{\frac{4}{3} - m_1}{1 + m_1\left(\frac{4}{3}\right)} \quad \rightarrow \quad 1 = \frac{\frac{4 - 3m_1}{3}}{\frac{3 + 4m_1}{3}}$$

$$1 = \frac{4 - 3m_1}{3 + 4m_1}$$

$$3 + 4m_1 = 4 - 3m_1$$

$$4m_1 + 3m_1 = 4 - 3$$

$$m_1 = \frac{1}{7}$$

Finalmente, las pendientes son: -7 y $\frac{1}{7}$.

EJERCICIO 11

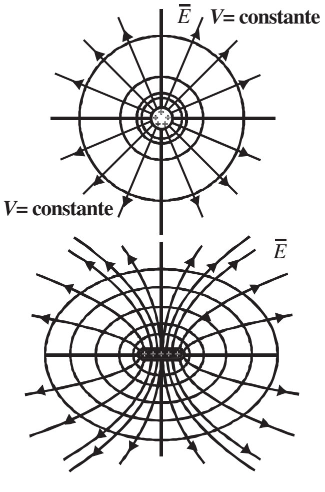
1. Determina la medida del ángulo agudo que forman las rectas con pendientes $\frac{1}{3}$ y $-\frac{4}{5}$.
2. ¿Cuál es la medida de cada uno de los ángulos interiores del triángulo, cuyos vértices son los puntos $A(-2, 2)$, $B(1, -1)$ y $C(0, -4)$?
3. Determina los ángulos interiores del triángulo, cuyos vértices son los puntos $A(-4, 1)$ $B(2, 3)$ y $C(1, -4)$.
4. Demuestra que los puntos $A(-2, 1)$, $B(3, 5)$ y $C(7, 0)$, son los vértices de un triángulo isósceles y encuentra la medida de sus ángulos interiores.
5. Comprueba que los puntos $A(3, 1)$, $B(7, 3)$ y $C(5, 2)$, son vértices de un triángulo rectángulo y encuentra la medida de sus ángulos agudos.
6. Encuentra la medida del ángulo obtuso del paralelogramo cuyos vértices son los puntos $A(-4, 1)$, $B(-2, 4)$, $C(5, 5)$ y $D(3, 2)$.
7. ¿Cuáles son las medidas de los ángulos interiores del paralelogramo, cuyos vértices son los puntos $A(1, 3)$, $B(2, 6)$, $C(7, 8)$ y $D(6, 5)$?
8. Comprueba que los puntos $A(-2, -1)$, $B(-4, 3)$, $C(3, 5)$ y $D(5, 1)$ son los vértices de un paralelogramo y determina la medida del ángulo obtuso que forman sus diagonales.
9. Al cortarse dos rectas forman un ángulo de 150º, si la recta final tiene pendiente $\frac{3}{5\sqrt{3}}$, calcula la pendiente de la recta inicial.
10. Al cortarse dos rectas forman un ángulo de 45°, la recta inicial pasa por los puntos $A(-1, 3)$ y $B(-4, 5)$ y la recta final pasa por el punto $C(3, 2)$ y por el punto D, cuya ordenada es 3. Determina el valor de la abscisa de D.
11. ¿Cuál es la pendiente de la recta que forma un ángulo de 135°, con la recta que pasa por los puntos de coordenadas $A(-3, 5)$ y $B(0, 1)$?
12. Las pendientes de dos rectas son 1 y $-2-\sqrt{3}$, respectivamente. Encuentra las pendientes de las bisectrices de los ángulos que forman (existen dos soluciones).

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 4

LUGAR GEOMÉTRICO

Superficies EQUIPOTENCIALES



Superficies equipotenciales

Las superficies equipotenciales es el lugar geométrico de todos los puntos que se encuentran al mismo potencial. Cumplen la condición de encontrarse en un plano perpendicular al campo eléctrico.

El trabajo desarrollado para mover una partícula de un punto *A* a otro punto *B* a lo largo de una superficie equipotencial es nulo, ya que:

$$V_A - V_B = \frac{W_{AB}}{q_o}$$

A lo largo de una superficie equipotencial $V_A = V_B$ entonces $W_{AB} = 0$

Problemas fundamentales de la geometría analítica

I. Dada una ecuación, representar el lugar geométrico que describe (discusión de un lugar geométrico).
II. Dadas las condiciones que deben cumplir los puntos que forman un lugar geométrico, encontrar su ecuación.

Primer problema (discusión de un lugar geométrico)

Dada la ecuación de un lugar geométrico se determinan las intersecciones y su simetría con los ejes, la extensión, sus asíntotas y, por último, la gráfica.

Intersecciones con los ejes

a) Con el eje X se sustituye $y = 0$ y se resuelve la ecuación para x.
b) Con el eje Y se sustituye $x = 0$ y se resuelve la ecuación para y.

Simetría con los ejes y el origen

a) Simetría respecto al eje X.
Si la ecuación de una curva no se altera cuando la variable y es reemplazada por $-y$, entonces la curva es simétrica respecto al eje X.
b) Simetría respecto al eje Y.
Si la ecuación de una curva no se altera cuando la variable x es reemplazada por $-x$, entonces la curva es simétrica respecto al eje Y.
c) Simetría respecto al origen.
Si la ecuación de la curva no se altera al sustituir x por $-x$ y y por $-y$, entonces la curva es simétrica respecto al origen.

Extensión de la curva

Determina los intervalos de variación para los cuales x y y están definidas.

Asíntotas

Son las rectas tales que si un punto se aleja del origen, la distancia de este punto a dicha recta va decreciendo, de tal forma que tiende a cero.

Gráfica

Conjunto de puntos del plano que satisfacen las condiciones establecidas por una ecuación.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Grafica la curva, cuya ecuación es $xy - 2x - 2y + 2 = 0$.

Solución

Intersección con los ejes coordenados

a) Se sustituye $y = 0$ y se despeja x:

$$\begin{aligned} xy - 2x - 2y + 2 &= 0 \\ x(0) - 2x - 2(0) + 2 &= 0 \\ -2x + 2 &= 0 \\ -2x &= -2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

El punto de intersección con el eje X es $(1, 0)$.

b) Se sustituye $x = 0$ y se despeja y:

$$xy - 2x - 2y + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad (0)y - 2(0) - 2y + 2 = 0$$
$$-2y + 2 = 0$$
$$-2y = -2$$
$$y = 1$$

El punto de intersección con el eje Y es $(0, 1)$.

Simetría

a) Simetría respecto al eje X.

Se sustituye y por $-y$ en la ecuación:

$$xy - 2x - 2y + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x(-y) - 2x - 2(-y) + 2 = 0$$
$$-xy - 2x + 2y + 2 = 0$$

La ecuación se altera, por tanto, no hay simetría respecto al eje X.

b) Simetría respecto al eje Y.

Se sustituye x por $-x$ en la ecuación:

$$xy - 2x - 2y + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad (-x)(y) - 2(-x) - 2y + 2 = 0$$
$$-xy + 2x - 2y + 2 = 0$$

La ecuación se altera, por consiguiente, no hay simetría respecto al eje Y.

c) Simetría respecto al origen.

Se sustituye x por $-x$, y por $-y$.

$$xy - 2x - 2y + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad (-x)(-y) - 2(-x) - 2(-y) + 2 = 0$$
$$xy + 2x + 2y + 2 = 0$$

La ecuación se altera, por consiguiente, no hay simetría respecto al origen.

Extensión de la curva

a) Extensión respecto al eje X.

Se despeja la variable y:

$$xy - 2x - 2y + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad xy - 2y = 2x - 2$$
$$y(x - 2) = 2x - 2$$
$$y = \frac{2x-2}{x-2}$$

Para $x = 2$, la variable y no está definida, por consiguiente, la extensión en X es:

$$\{x \in R \mid x \neq 2\} \text{ también se puede escribir } \{x \in R \mid -\infty < x < 2\} \cup \{x \in R \mid 2 < x < \infty\}$$

b) Extensión respecto al eje Y.

Se despeja la variable x:

$$xy - 2x - 2y + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad xy - 2x = 2y - 2$$
$$x(y - 2) = 2y - 2$$
$$x = \frac{2y-2}{y-2}$$

Para $y = 2$, la variable x no está definida, en consecuencia, la extensión en y es:

$$\{y \in R \mid y \neq 2\} \text{ o } \{y \in R \mid -\infty < y < 2\} \cup \{y \in R \mid 2 < y < \infty\}$$

Asíntotas

a) Asíntotas horizontales.

Se obtienen al despejar la variable x y resolver la ecuación que resulta al igualar con cero el denominador:

$$xy - 2x - 2y + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad xy - 2x = 2y - 2$$
$$x(y - 2) = 2y - 2$$
$$x = \frac{2y-2}{y-2}$$

$y - 2 = 0$, por tanto, la asíntota horizontal es $y = 2$.

b) Asíntotas verticales.

Se obtienen al despejar la variable y y resolver la ecuación que resulta al igualar con cero el denominador, entonces:

$$xy - 2x - 2y + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad xy - 2y = 2x - 2$$
$$y(x - 2) = 2x - 2$$
$$y = \frac{2x-2}{x-2}$$

$x - 2 = 0$, por consiguiente, la asíntota vertical es $x = 2$.

Gráfica

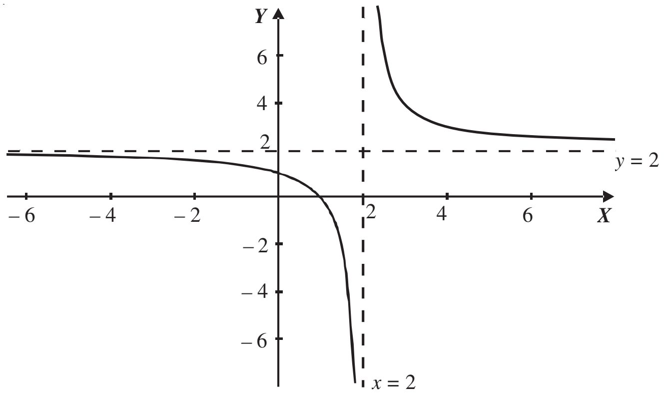
Se tabula la variable y en función de la variable x, donde x toma valores en el intervalo $\{x \in R \mid -\infty < x < 2\} \cup \{x \in R \mid 2 < x < \infty\}$

$$y = \frac{2x-2}{x-2}$$

Tabulación:

x	–3	–2	–1	0	1	3	4	5	6	7
y	1.6	1.5	1.3	1	0	4	3	2.6	2.5	2.4

Se grafican las asíntotas $y = 2$ y $x = 2$, posteriormente los puntos:



2 Construye la curva, cuya ecuación es $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$.

Solución

Intersección con los ejes coordenados

a) Se sustituye $y = 0$ y se despeja x:

$$4x^2 + 9y^2 - 36 = 0 \quad \rightarrow \quad 4x^2 + 9(0)^2 - 36 = 0$$
$$4x^2 = 36$$
$$x^2 = 9$$
$$x = \pm\sqrt{9}$$
$$x = \pm 3$$
$$x = -3, x = 3$$

Los puntos de intersección con el eje X son: $(-3, 0)$ y $(3, 0)$.

b) Se sustituye $x = 0$ y se despeja y:

$$4x^2 + 9y^2 - 36 = 0 \quad \rightarrow \quad 4(0)^2 + 9y^2 - 36 = 0$$
$$9y^2 = 36$$
$$y^2 = 4$$
$$y = \pm\sqrt{4}$$
$$y = \pm 2$$
$$y = -2,\ y = 2$$

Los puntos de intersección con el eje Y son: $(0, -2)$ y $(0, 2)$.

Simetría

a) Simetría respecto al eje X.
Se sustituye y por $-y$ en la ecuación:

$$4x^2 + 9(-y)^2 - 36 = 0 \quad \rightarrow \quad 4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$$

La ecuación no se altera, por tanto, sí es simétrica respecto al eje X.

b) Simetría respecto al eje Y.

Se sustituye x por $-x$ en la ecuación:

$$4(-x)^2 + 9y^2 - 36 = 0 \quad \rightarrow \quad 4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$$

La ecuación no se altera, por consiguiente, es simétrica respecto al eje Y.

c) Simetría respecto al origen.

Se sustituye x por $-x$, y por $-y$.

$$4(-x)^2 + 9(-y)^2 - 36 = 0 \quad \rightarrow \quad 4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$$

La ecuación no se altera, por tanto, es simétrica respecto al origen.

Extensión de la curva

a) Extensión respecto al eje X.
Se despeja la variable y:

$$4x^2 + 9y^2 - 36 = 0 \quad \rightarrow \quad 9y^2 = 36 - 4x^2 \quad \rightarrow \quad y^2 = \frac{36 - 4x^2}{9} \quad \rightarrow \quad y = \pm\sqrt{\frac{4(9 - x^2)}{9}}$$
$$y = \pm\frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}$$

y está definida cuando $9 - x^2 \geq 0$, resolviendo la desigualdad, se obtiene:

$$\{x \in R \mid -3 \leq x \leq 3\} \text{ o } x \in [-3, 3]$$

Es decir, la curva se extiende en el eje x desde -3 a 3.

b) Extensión respecto al eje Y.

Se despeja la variable x:

$$4x^2 + 9y^2 - 36 = 0 \quad \rightarrow \quad 4x^2 = 36 - 9y^2 \quad \rightarrow \quad x^2 = \frac{36 - 9y^2}{4} \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{9(4 - y^2)}{4}}$$
$$x = \pm\frac{3}{2}\sqrt{4 - y^2}$$

x está definida cuando $4 - y^2 \geq 0$, resolviendo la desigualdad, se obtiene:

$$\{y \in R \mid -2 \leq y \leq 2\} \text{ o } y \in [-2, 2]$$

Es decir, la curva se extiende en el eje y desde -2 a 2.

Asíntotas

a) Asíntotas horizontales.
Al despejar y se obtiene $y = \pm\frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}$, la variable x no queda en el denominador por tanto no hay asíntotas horizontales.

b) Asíntotas verticales.

Al despejar x se obtiene $x=\pm\frac{3}{2}\sqrt{9-y^2}$, la variable y no queda en el denominador por tanto no hay asíntotas verticales.

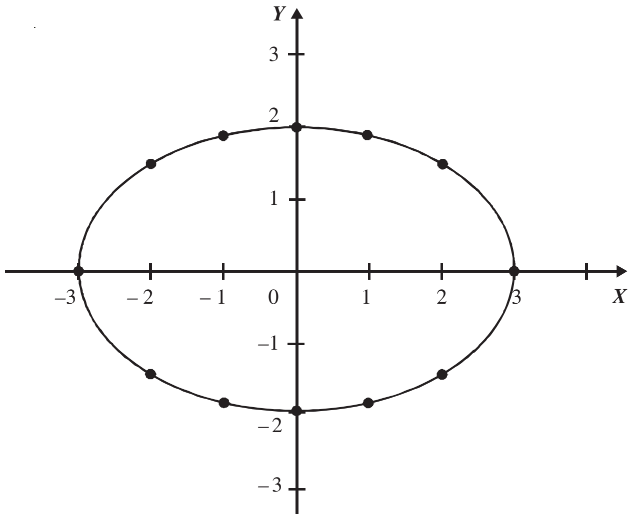
Gráfica

Se hace una tabulación en la ecuación obtenida al despejar a y, para valores de x que estén en el intervalo $\{x\in R\,|\,-3\le x\le 3\}$

$$y=\pm\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$$

Tabulación:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	0	± 1.49	± 1.88	± 2	± 1.88	± 1.49	0



EJERCICIO 12

Analiza las siguientes ecuaciones y encuentra las intersecciones con los ejes, simetría, extensión, asíntotas y traza la gráfica:

1. $xy-3x-6=0$
2. $xy+2y+4=0$
3. $xy-5x+2y=0$
4. $xy+3y-4x=0$
5. $2xy-3y+6=0$
6. $x^2-8y=0$
7. $x^2+4y^2-16=0$
8. $x^2+4x+4y+20=0$
9. $x^2+xy-y^2=0$
10. $9x^2-16y^2=144$
11. $y^2-8x-2y+17=0$
12. $x^2+y^2-6x=0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Segundo problema (dadas las condiciones del lugar geométrico, encontrar su ecuación)

Para determinar la ecuación de un lugar geométrico se necesitan las condiciones que deben cumplir los puntos que lo forman o la figura misma. Analicemos a través de los siguientes ejemplos:

EJEMPLOS

1 Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos en el plano, cuya distancia al punto (3, 2) es siempre igual a 5.

Solución

La distancia de los puntos (x, y) del plano al punto (3, 2) es 5, al aplicar la fórmula de distancia entre dos puntos:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \quad\rightarrow\quad 5=\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}$$

Se obtiene el cuadrado de ambos miembros, se desarrollan los binomios y se simplifica:

$$(5)^2=\left(\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}\right)^2 \quad\rightarrow\quad 25=(x-3)^2+(y-2)^2$$

$$25=x^2-6x+9+y^2-4y+4$$

$$x^2-6x+9+y^2-4y+4-25=0$$

$$x^2+y^2-6x-4y-12=0$$

Por consiguiente la ecuación del lugar geométrico es: $x^2+y^2-6x-4y-12=0$.

2 Determina la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que se conserva siempre equidistante de los puntos $A(1, -2)$ y $B(5, 4)$.

Solución

La condición es que la distancia del punto $P(x, y)$ a los puntos A y B sea la misma, es decir:

$$\overline{AP}=\overline{BP}$$

Al usar la fórmula de la distancia entre dos puntos $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$, se obtiene:

$$\overline{AP}=\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2} \qquad \overline{BP}=\sqrt{(x-5)^2+(y-4)^2}$$

Se sustituye en la condición:

$$\overline{AP}=\overline{BP}$$

$$\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}=\sqrt{(x-5)^2+(y-4)^2}$$

Al elevar al cuadrado ambos miembros y simplificar la expresión, se obtiene:

$$\left(\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}\right)^2=\left(\sqrt{(x-5)^2+(y-4)^2}\right)^2$$

$$(x-1)^2+(y+2)^2=(x-5)^2+(y-4)^2$$

$$x^2-2x+1+y^2+4y+4=x^2-10x+25+y^2-8y+16$$

$$x^2-2x+1+y^2+4y+4-x^2+10x-25-y^2+8y-16=0$$

$$(8x+12y-36=0)\div 4$$

$$2x+3y-9=0$$

3 Determina la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la suma de los cuadrados de las distancias a los puntos $A(2, 3)$ y $B(6, 7)$, es igual a 100.

Solución

Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera del lugar geométrico, la condición que se da es:

$$\left(\overline{PA}\right)^2 + \left(\overline{PB}\right)^2 = 100$$

Al utilizar la fórmula de distancia entre dos puntos $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ se obtiene:

$$\overline{PA} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} \qquad \overline{PB} = \sqrt{(x-6)^2 + (y-7)^2}$$

Ahora bien, al sustituir en la condición:

$$\left(\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(x-6)^2 + (y-7)^2}\right)^2 = 100$$

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 + (x-6)^2 + (y-7)^2 = 100$$

En tanto que, al desarrollar los binomios y simplificar, se obtiene:

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 + x^2 - 12x + 36 + y^2 - 14y + 49 - 100 = 0$$

$$2x^2 + 2y^2 - 16x - 20y - 2 = 0$$

$$(2x^2 + 2y^2 - 16x - 20y - 2 = 0) \div (2)$$

$$x^2 + y^2 - 8x - 10y - 1 = 0$$

Por tanto la ecuación del lugar geométrico es: $x^2 + y^2 - 8x - 10y - 1 = 0$.

4 Encuentra la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a los puntos $A(0, 3)$ y $B(0, -3)$, es igual a 10.

Solución

Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera del lugar geométrico, que satisface la condición:

$$\overline{AP} + \overline{PB} = 10$$

Al utilizar la fórmula de la distancia entre dos puntos $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, para determinar la distancia a los puntos $A(0, 3)$ y $B(0, -3)$, se obtiene que:

$$\overline{AP} = \sqrt{x^2 + (y-3)^2} \qquad \overline{PB} = \sqrt{x^2 + (y+3)^2}$$

Se sustituye en la condición:

$$\overline{AP} + \overline{PB} = 10$$

$$\sqrt{x^2 + (y-3)^2} + \sqrt{x^2 + (y+3)^2} = 10$$

Se desarrolla y simplifica:

$$\sqrt{x^2 + (y-3)^2} = 10 - \sqrt{x^2 + (y+3)^2}$$

$$\left(\sqrt{x^2 + (y-3)^2}\right)^2 = \left(10 - \sqrt{x^2 + (y+3)^2}\right)^2$$

$$x^2 + (y-3)^2 = 100 - 20\sqrt{x^2 + (y+3)^2} + \left(\sqrt{x^2 + (y+3)^2}\right)^2$$

$$x^2 + (y-3)^2 = 100 - 20\sqrt{x^2 + (y+3)^2} + x^2 + (y+3)^2$$

$$x^2 + y^2 - 6y + 9 = 100 - 20\sqrt{x^2 + (y+3)^2} + x^2 + y^2 + 6y + 9$$

$$x^2 + y^2 - 6y + 9 - x^2 - y^2 - 6y - 9 - 100 = -20\sqrt{x^2 + (y+3)^2}$$

$$-12y - 100 = -20\sqrt{x^2 + (y+3)^2}$$

$$\left[-12y - 100 = -20\sqrt{x^2 + (y+3)^2}\right] \div (-4)$$

$$3y + 25 = 5\sqrt{x^2 + (y+3)^2}$$

$$(3y + 25)^2 = \left[5\sqrt{x^2 + (y+3)^2}\right]^2$$

$$9y^2 + 150y + 625 = 25[(x^2 + (y + 3)^2]$$

$$9y^2 + 150y + 625 = 25x^2 + 25y^2 + 150y + 225$$

$$25x^2 + 25y^2 + 150y + 225 - 9y^2 - 150y - 625 = 0$$

$$25x^2 + 16y^2 - 400 = 0$$

Por tanto, la ecuación del lugar geométrico es: $25x^2 + 16y^2 - 400 = 0$

EJERCICIO 13

Resuelve:

1. Determina la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve, de tal manera que la diferencia de la ordenada con la abscisa es siempre igual a 2.
2. Encuentra la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve, de tal manera que el producto de la abscisa y la ordenada sea igual a la unidad.
3. Determina la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve, de tal manera que su ordenada es igual a la mitad de su abscisa.
4. Determina la ecuación del lugar geométrico del punto que equidista del origen, cinco unidades.
5. Encuentra la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los puntos $A(-3, 4)$ y $B(4, 1)$.
6. Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que se encuentran a cinco unidades del punto $(4, -3)$.
7. Encuentra la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve, de tal manera que equidista del eje de las abscisas y del punto $(0, -5)$.
8. Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los puntos $(-2, 4)$ y $(-6, 2)$.
9. Encuentra la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano, tales que su distancia al punto $(-3, -2)$ es igual a 8.
10. Determina la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la suma de los cuadrados de las distancias a los puntos $A(-1, 3)$ y $B(7, 3)$, es igual a 50.
11. Encuentra la ecuación del lugar geométrico de los puntos que se mueve de tal forma que la suma de las distancias a los puntos fijos $A(-4, 3)$ y $B(2, -6)$ es siempre igual a 15.
12. Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a los puntos $(-4, 0)$ y $(4, 0)$, sea igual a 10.
13. Encuentra la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la diferencia de sus distancias a los puntos $(0, 2)$ y $(0, -2)$, es siempre igual a 3 (dos soluciones).
14. Determina la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a los puntos $A(0, 3)$ y $B(0, -3)$, es igual a 8.
15. Encuentra la ecuación de los puntos del plano, tales que la diferencia de sus distancias a los puntos $(-2, 5)$ y $(6, 5)$, sea siempre igual a 6.

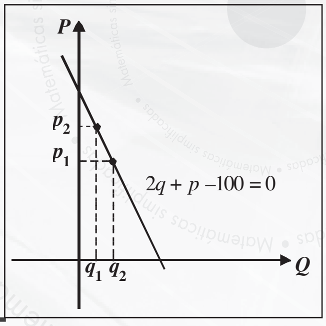
Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 5

LÍNEA RECTA

Aplicaciones de las rectas

EN MICROECONOMÍA



Gráfica de la curva de demanda

Curvas de demanda lineal

Las ecuaciones lineales proporcionan representaciones razonablemente precisas de la demanda en un intervalo limitado.

En general, las ecuaciones de demanda lineales se utilizan para mayor simplicidad y claridad al ilustrar cierto tipo de análisis.

La ecuación de la recta indica situaciones que se presentan al realizar un análisis:

Por ejemplo:

Cuando el precio es de 80 unidades monetarias (*u.m.*) se venden 10 relojes y se venden 20 cuando el precio es de 60 *u.m.* ¿Cuál es la ecuación de la demanda?

Datos	*Fórmula*
$q_1 = 10,\ p_1 = 80$	$p - p_1 = \frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1}(q - q_1)$
$q_2 = 20,\ p_2 = 60$	

Al sustituir los datos se obtiene la ecuación:

$$2q + p - 100 = 0$$

Este ejemplo indica que mientras la cantidad de demanda aumenta el precio disminuye.

Definición

La línea recta es el lugar geométrico de los puntos del plano, de los cuales al tomar dos cualesquiera, el valor de la pendiente m siempre es constante.

Ecuaciones de la recta

Para determinar la ecuación de una recta en función de las condiciones dadas, se emplean las siguientes ecuaciones, según corresponda.

Ecuación general

Es aquella que se expresa de la siguiente manera:

$$Ax + By + C = 0$$

Donde: A, B y C son constantes.

Ecuación punto – pendiente

Dado el punto $P_1(x_1, y_1)$ de la recta de pendiente m, su ecuación es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Dados los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ de la recta, su ecuación es:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

EJEMPLOS

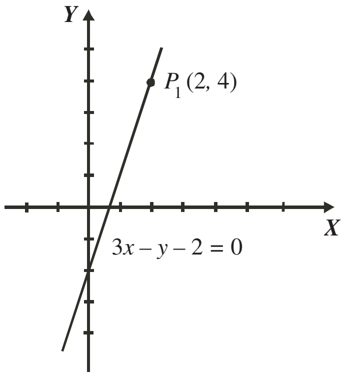
Ejemplos

1 ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por el punto $P_1(2, 4)$ y tiene pendiente 3?

Solución

Se sustituyen los valores de $x_1 = 2$, $y_1 = 4$ y $m = 3$ en la ecuación:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 4 = 3(x - 2)$$
$$y - 4 = 3x - 6$$
$$-3x + y - 4 + 6 = 0$$
$$-3x + y + 2 = 0$$
$$3x - y - 2 = 0$$



Por consiguiente, la ecuación de la recta que pasa por el punto (2, 4) y tiene pendiente 3, es: $3x - y - 2 = 0$.

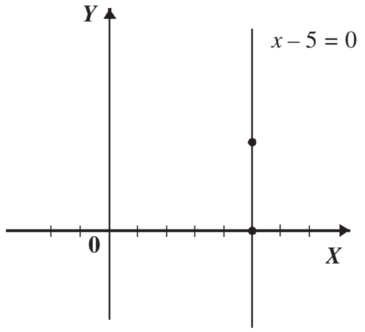
2 ¿Cuál es la ecuación de la recta que es perpendicular al eje X y que se encuentra a 5 unidades a la derecha del eje vertical?

Solución

Las rectas perpendiculares al eje X tienen ecuación de la forma $x = x_1$, donde x_1 es la abscisa del punto de intersección de la recta con el eje horizontal.

La recta se encuentra a 5 unidades a la derecha del eje vertical, entonces sus puntos tienen coordenadas $(5, y_1)$, y al sustituir el valor de la abscisa en la ecuación se obtiene:

$$x = 5$$
$$x - 5 = 0$$

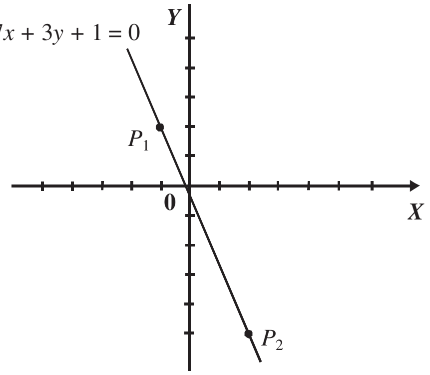


3 Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P_1(-1, 2)$ y $P_2(2, -5)$

Solución

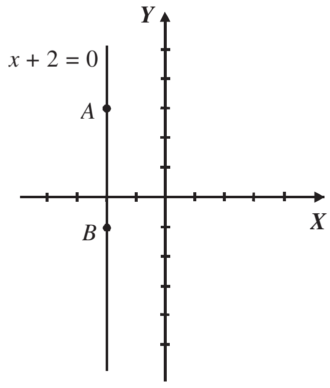
Los valores de las abscisas y ordenadas se sustituyen en la ecuación:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$
$$y - 2 = \frac{-5-2}{2-(-1)}(x - (-1))$$
$$y - 2 = -\frac{7}{3}(x + 1)$$
$$3(y - 2) = -7(x + 1)$$
$$3y - 6 = -7x - 7$$
$$7x + 3y - 6 + 7 = 0$$
$$7x + 3y + 1 = 0$$



En consecuencia, la ecuación de la recta es: $7x + 3y + 1 = 0$.

4 Una recta pasa por los puntos $A(-2, 3)$ y $B(-2, -1)$. Encuentra su ecuación.



Solución

Al sustituir en la fórmula $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$, se determina que:

$$y - 3 = \frac{-1-3}{-2+2}(x - (-2))$$

$$y - 3 = -\frac{4}{0}(x + 2)$$

La pendiente de la recta es de la forma $\frac{c}{0}$ (no está definido), por consiguiente, es perpendicular al eje X y su ecuación es de la forma:

$$x = x_1$$

Por tanto, su ecuación es:

$$x = -2$$
$$x + 2 = 0$$

Es decir, la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B es: $x + 2 = 0$.

5 Determina los vértices del triángulo, cuyos lados están dados por las ecuaciones de las rectas:

$$3x + 7y - 13 = 0;\ x - y - 1 = 0;\ 7x + 3y + 23 = 0$$

Solución

Se combinan las rectas para formar tres sistemas de ecuaciones, los cuales se resuelven por cualquiera de los métodos conocidos:

Sistema de ecuaciones para el vértice A:

$$3x + 7y - 13 = 0$$
$$x - y - 1 = 0$$

Punto de intersección: $A(2, 1)$

Sistema de ecuaciones para el vértice B:

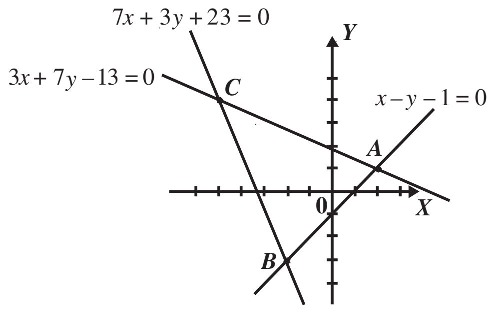
$$x - y - 1 = 0$$
$$7x + 3y + 23 = 0$$

Punto de intersección: $B(-2, -3)$

Sistema de ecuaciones para el vértice C:

$$3x + 7y - 13 = 0$$
$$7x + 3y + 23 = 0$$

Punto de intersección: $C(-5, 4)$



6 Si se compran 20 pantalones el precio unitario de la prenda es de $300, pero si se compran 50, entonces el costo de cada pantalón es de $280, encuentra la ecuación de la demanda.

Solución

Considerando:

x = número de pantalones　　　y = precio por pantalón

Se forman los siguientes pares coordenados:

(20, 300) y (50, 280)

Se aplica la ecuación de la recta que pasa por dos puntos y se obtiene:

$$y-300=\frac{280-300}{50-20}(x-20) \quad \rightarrow \quad y-300=-\frac{20}{30}(x-20)$$

$$y-300=-\frac{2}{3}(x-20)$$

Al transformar esta última ecuación a su forma general, obtiene la ecuación de la demanda:

$$2x + 3y - 940 = 0$$

7 Un resorte se deforma 2 centímetros bajo la acción de una fuerza de 15 newtons, si la fuerza se incrementa a 25 newtons, entonces se deforma $3\frac{1}{3}$ de centímetro, ¿cuál es la ecuación que representa la deformación que sufre el resorte en función de la fuerza?

Solución

Considere:

x = fuerza que actúa sobre el resorte　　　y = deformación

Se forma entonces la siguiente pareja de puntos:

$$(15,\ 2) \text{ y } \left(25,\ 3\frac{1}{3}\right)$$

Se aplica la ecuación de la recta que pasa por dos puntos y al convertir a su forma general se obtiene:

$$y-2=\frac{3\frac{1}{3}-2}{25-15}(x-15) \quad \rightarrow \quad y-2=\frac{\frac{10}{3}-2}{10}(x-15) \quad \rightarrow \quad y-2=\frac{\frac{4}{3}}{10}(x-15)$$

$$y-2=\frac{2}{15}(x-15)$$

$$15(y-2)=2(x-15)$$

$$15y-30=2x-30$$

$$0=2x-15y$$

Por consiguiente, la ecuación general de la deformación del resorte es: $2x - 15y = 0$.

EJERCICIO 14

Encuentra las ecuaciones generales de las rectas que satisfacen las siguientes condiciones:

1. Pasa por (– 3, 4) y $m = -\frac{2}{5}$
2. Pasa por (0, 3) y $m = 2$
3. Pasa por $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$ y $m = 0$
4. Pasa por $\left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$ y $m = -1$
5. Pasa por (– 2, 1) y (3, 4)
6. Pasa por (0, 2) y (– 3, – 2)
7. Pasa por (3, –1) y (3, 4)
8. Pasa por $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right)$ y $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$
9. Pasa por (0, 1) y $\left(\frac{4}{3}, -1\right)$
10. Encuentra la ecuación general de la recta que pasa por $A(-1, 3)$ y tiene pendiente $-\frac{3}{5}$.
11. Una recta pasa por (– 1, 4) y desciende tres unidades por cada dos unidades que incrementa x. ¿Cuál es su ecuación general?
12. Obtén la ecuación general de la recta, cuya intersección con el eje X es 3 y su inclinación es de 120°.
13. Determina la ecuación general de la recta que pasa por el punto $A(6, -2)$ y tiene un ángulo de inclinación de 135°.
14. Encuentra la ecuación de la recta que es perpendicular al eje X y está a tres unidades a la derecha del eje vertical.
15. Encuentra la ecuación de la recta que es paralela al eje Y y está cuatro unidades a la izquierda del eje horizontal.
16. Los segmentos que una recta determina sobre los ejes X y Y, son 4 y – 6, respectivamente. Determina su ecuación general.
17. Encuentra la ecuación general de la recta que pasa por el punto $A(2, -1)$ y determina sobre el eje X el segmento – 2.
18. Los vértices de un cuadrilátero son $A(0, 0)$, $B(-1, 2)$, $C(3, 5)$ y $D(5, 0)$. Obtén las ecuaciones generales de sus lados.
19. ¿Cuál es la ecuación general de la recta, cuya pendiente es – 2 y su intersección con el eje Y es 4?
20. Una recta pasa por el punto $A(7, 8)$ y es paralela a la recta que pasa por los puntos $C(-2, 2)$ y $D(3, -4)$. Determina su ecuación general.
21. Demuestra que los puntos $A(-1, 2)$, $B(2, 4)$ y $C(5, 6)$ son colineales, mediante la ecuación de la recta que pasa por dos de estos puntos.

Con base al triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1, 2)$, $B(3, -1)$ y $C(-4, -5)$, realiza los ejercicios 22 al 27:

22. Obtén las ecuaciones generales de las rectas que pasan por los vértices y son paralelas a los lados opuestos.
23. Encuentra la ecuación general de la recta que pasa por el punto medio de A con B y es perpendicular al mismo lado.
24. Determina la ecuación general de la recta que pasa por el punto medio del $\overline{BC}$ y por el vértice A.
25. Obtén la ecuación general de la recta que pasa por el vértice C y es perpendicular al lado $\overline{AB}$.
26. ¿Cuáles son las ecuaciones generales de las rectas que pasan por el vértice B y trisecan al $\overline{AC}$?
27. Mediante las ecuaciones de línea recta, encuentra las coordenadas de los vértices del triángulo, cuyos puntos medios son los puntos A, B y C.
28. Las ecuaciones de los lados de un triángulo son:

$$x - 3y + 3 = 0;\ 2x + 7y + 6 = 0;\ 4x + y - 14 = 0$$

Determina las coordenadas de los vértices.

29. Las ecuaciones de los lados de un paralelogramo son:

$$x - 4y + 11 = 0;\ 2x + y + 4 = 0;\ x - 4y - 7 = 0;\ 2x + y - 14 = 0$$

Determina las coordenadas de sus vértices.

30. Un automóvil se mueve con velocidad constante y recorre 60 km en media hora, si ese mismo automóvil recorre 150 km en una hora con 15 minutos, encuentra la ecuación que relaciona la distancia y en kilómetros recorrida por el automóvil, en términos del tiempo x en horas.

31. La velocidad de una partícula en un tiempo de 2 segundos es de 5 metros por segundo y para un tiempo de 8 segundos se mueve a razón de 14 metros por segundo. Determina la ecuación que relaciona la velocidad de la partícula en función del tiempo.
32. Si el dueño de una papelería le compra a un proveedor 100 libretas, éste le da un precio de \$12.50 cada una, pero si le compra 120, entonces el precio de cada libreta disminuye en ¢50, escribe la ecuación de la demanda.
33. Una empresa desea realizar una campaña publicitaria de un nuevo producto, para esto visita un taller de impresión y les informan que el costo de producir 15 millares de folletos publicitarios tienen un costo de \$3 000, pero si desean 20 millares, el costo es de \$3 600, obtén la ecuación de la recta que representa esta situación. (Considera x = número de millares; y = costo).
34. Una temperatura de 20°C equivale a 68°F, y 50°C equivalen a 122°F, determina la ecuación que relaciona la temperatura T_C en grados Celsius con la temperatura T_F en grados Fahrenheit.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Formas de la ecuación de una recta

Conocidas las condiciones que determinan una recta o su ecuación, éstas se expresan de las siguientes formas:

Ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada al origen (forma ordinaria o reducida)

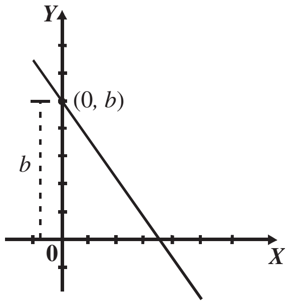
Una vez que se conoce la pendiente de una recta y su ordenada al origen (intersección con el eje Y), se determina la siguiente ecuación:

$$y = mx + b$$

Donde, m: pendiente

b: ordenada al origen

Esta forma de la ecuación de la recta, también se conoce como forma simplificada o reducida.



EJEMPLOS

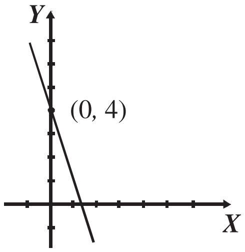
Ejemplos

1 Encuentra la ecuación de la recta, cuya intersección con el eje Y es 4 y su pendiente – 3.

Solución

Los datos son: $m = -3$ y $b = 4$, al sustituir se obtiene:

$$y = mx + b$$
$$y = -3x + 4$$
$$3x + y - 4 = 0$$



Finalmente, la ecuación es: $3x + y - 4 = 0$.

2 Determina la ecuación general de la recta que tiene pendiente $\frac{1}{2}$ y su intersección con el eje Y es el punto (0, – 5).

Solución

Los datos son: $m = \frac{1}{2}$ y $b = -5$, al sustituir en la ecuación ordinaria, se obtiene:

$y = \frac{1}{2}x - 5$ Al multiplicar por 2 para eliminar el denominador.

$2y = x - 10$ Al igualar a cero la ecuación, resulta: $x - 2y - 10 = 0$.

Transformación de la ecuación general a la forma ordinaria

Para transformar $Ax + By + C = 0$, a la forma $y = mx + b$, se procede de la siguiente manera:

Se despeja la variable y de:

$$Ax + By + C = 0$$
$$By = -Ax - C$$
$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

Esta ecuación es de la forma pendiente–ordenada al origen.

Si se compara con la ecuación $y = mx + b$ se obtienen los valores de m y b, en términos de los coeficientes de la ecuación general:

$$m = -\frac{A}{B} \text{ y } b = -\frac{C}{B}$$

EJEMPLOS

1 ¿Cuál es la pendiente y la intersección con el eje Y de la recta $4x - 5y + 12 = 0$?

Solución

Despejando la variable y:

$$4x - 5y + 12 = 0 \quad \rightarrow \quad -5y = -4x - 12$$
$$y = \frac{-4}{-5}x - \frac{12}{-5}$$
$$y = \frac{4}{5}x + \frac{12}{5}$$

Por consiguiente, la ecuación en su forma pendiente–ordenada al origen es:

$$y = \frac{4}{5}x + \frac{12}{5}$$

De esta ecuación se determina la pendiente y el punto de intersección con el eje Y:

$$m = \frac{4}{5} \text{ y } \left(0, \frac{12}{5}\right)$$

2 Transforma a la forma simplificada la siguiente ecuación: $3x + 5y - 7 = 0$.

Solución

Se determinan los valores de A, B y C como sigue:

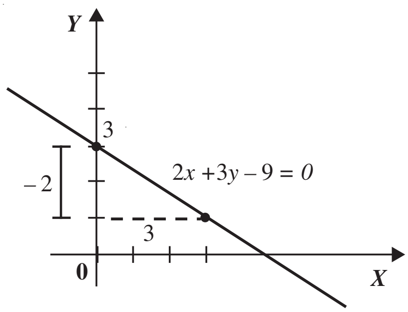
$$A = 3,\ B = 5 \text{ y } C = -7$$

Se sustituyen en $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$, para obtener la forma simplificada:

$$y = -\frac{3}{5}x - \frac{-7}{5} \quad \rightarrow \quad y = -\frac{3}{5}x + \frac{7}{5}$$

3 Emplea la forma ordinaria de la ecuación de la recta y grafica la siguiente recta:

$$2x + 3y - 9 = 0$$



Solución

Se transforma la ecuación propuesta a su forma ordinaria:

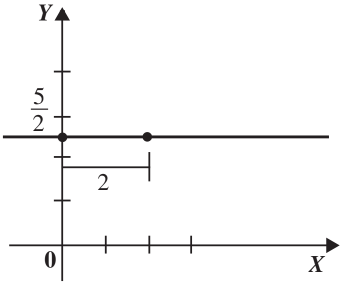
$$2x + 3y - 9 = 0$$
$$3y = -2x + 9$$
$$y = -\frac{2}{3}x + 3$$

Se obtiene:

La ordenada al origen es $b = 3$, significa que la recta corta al eje y 3 unidades por encima del origen.

La pendiente $m = -\frac{2}{3}$, significa que y disminuye 2 unidades y x aumenta tres.

4 Grafica la recta de la ecuación $2y - 5 = 0$.



Solución

Se expresa la ecuación como:

$$0x + 2y - 5 = 0$$

Se despeja y de la ecuación y se obtiene:

$$y = \frac{0}{2}x + \frac{5}{2}$$

El valor de $b = \frac{5}{2}$

La pendiente es cero pero se expresa de manera equivalente como $m = \frac{0}{2}$ para poder graficar.

5 Determina la ecuación general de la recta que pasa por el punto $A(-5, 3)$ y es perpendicular a la recta $3x + 2y - 6 = 0$.

Solución

La ecuación $3x + 2y - 6 = 0$ se expresa en su forma pendiente–ordenada al origen:

$$y = -\frac{3}{2}x + 3$$

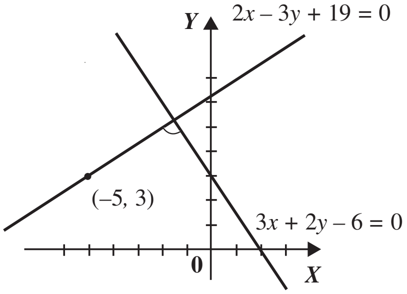
La pendiente de esta recta es: $m = -\frac{3}{2}$.

La recta perpendicular a ella que pasa por el punto $(-5, 3)$ cumple la condición: $m \cdot m' = -1$

$$-\frac{3}{2}m' = -1 \quad ; \quad m' = \frac{2(-1)}{-3} = \frac{2}{3}$$

Se sustituyen las coordenadas del punto y la pendiente m' en la ecuación:

$$y - y_1 = m'(x - x_1)$$
$$y - 3 = \frac{2}{3}(x - (-5))$$
$$3(y - 3) = 2(x + 5)$$
$$3y - 9 = 2x + 10$$
$$-2x + 3y - 9 - 10 = 0$$
$$-2x + 3y - 19 = 0$$



Finalmente, la ecuación de la recta es:

$$2x - 3y + 19 = 0$$

6 Una recta pasa por el punto (2, 3) y es paralela a la recta $x - 2y = 0$, ¿cuál es su ecuación general?

Solución

Se expresa la ecuación $x - 2y = 0$ en su forma pendiente ordenada al origen:

$$y = \frac{1}{2}x$$

La pendiente de esta recta es $m = \frac{1}{2}$, como la recta que se busca es paralela, entonces tiene la misma pendiente: $m' = m = \frac{1}{2}$.

Se sustituye el punto y la pendiente en la ecuación y se expresa en su forma general, obteniendo como resultado:

$$y - 3 = \frac{1}{2}(x - 2) \quad \rightarrow \quad x - 2y + 4 = 0$$

7 Para las rectas $x + 4y - 4 = 0$ y $2x - 3y + 6 = 0$, determina la medida del ángulo agudo que forman.

Solución

Se expresan las rectas en su forma ordinaria para obtener sus respectivas pendientes:

$$y = -\frac{1}{4}x + 1 \quad \rightarrow \quad m_1 = -\frac{1}{4} \qquad y = \frac{2}{3}x + 2 \quad \rightarrow \quad m_2 = \frac{2}{3}$$

Se sustituyen los valores de las pendientes en la fórmula de ángulo entre dos rectas:

$$\theta = arc\ tan\left(\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}\right) = arc\ tan\left(\frac{\frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{4}\right)}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)}\right) = arc\ tan\left(\frac{11}{10}\right) = 47°43'34''$$

Por tanto, el ángulo agudo que forman dichas rectas es de 47° 43′34″.

8 Un cuerpo tiene una velocidad de 4 metros por segundo, después de 6 segundos, su velocidad es de 12 metros por segundo. Expresa la velocidad de dicho cuerpo en función del tiempo, obtén su velocidad para un tiempo de 9 segundos y traza la gráfica.

Solución

Este problema relaciona a la velocidad v con el tiempo t, por tanto, los pares ordenados son de la forma: (t, v).

Por consiguiente, los pares ordenados son: (0, 4) y (6, 12).

Se aplica la ecuación de la recta que pasa por dos puntos y se despeja v:

$$v - v_1 = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}(t - t_1) \quad \rightarrow \quad v - 4 = \frac{12 - 4}{6 - 0}(t - 0) \quad \rightarrow \quad v = \frac{4}{3}t + 4$$

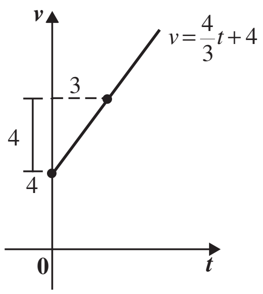
Se obtiene que $m = \frac{4}{3}$ y $b = 4$, la pendiente de la recta representa la aceleración del cuerpo y la ordenada al origen su velocidad inicial.

La velocidad del cuerpo en $t = 9\ s$, se obtiene al sustituir este valor en la ecuación:

$$v = \frac{4}{3}t + 4 \quad \rightarrow \quad v = \frac{4}{3}(9) + 4$$

$$v = 16\frac{m}{s}$$

La representación gráfica del problema es:



Por tanto, para 9 segundos, la velocidad del cuerpo es de $16\frac{m}{s}$.

9 Cierta empresa se dedica a fabricar bolsas de plástico, el costo de fabricación de x número de ellas es de $C = 4x + 3\,200$. Los ingresos por la venta de las bolsas fabricadas están dados por la ecuación $I = 12x$.

a) ¿Cuál es el costo de producción de 1 500 bolsas?
b) Si se fabrican 1 000 bolsas, ¿de cuánto es la utilidad?
c) ¿Cuántas bolsas se deben fabricar para que la utilidad sea nula?
d) Construye la gráfica que muestre la ecuación de costos e ingresos.

Solución

a) Se sustituye el valor de $x = 1\,500$ en la ecuación de costos:

$C = 4x + 3\,200$ $\qquad$ $C = 4(1\,500) + 3\,200$
$= 6\,000 + 3\,200$
$= 9\,200$

por consiguiente, producir 1 500 bolsas tiene un costo de \$9 200.

b) La ecuación de utilidad resulta de la diferencia de la ecuación de ingresos y costos.

$$U = I - C \qquad U = 12x - (4x + 3\,200) \qquad U = 8x - 3\,200$$

Para $x = 1\,000$ se obtiene:

$$U = 8(1\,000) - 3\,200$$
$$= 8\,000 - 3\,200$$
$$= 4\,800$$

Finalmente, la utilidad que genera la venta de 1 000 bolsas es de \$4 800.

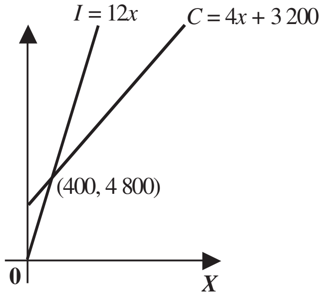
c) El número de bolsas que deben fabricarse y venderse para que la utilidad sea nula es:

$U = 8x - 3\,200$ $\qquad$ $0 = 8x - 3\,200$ $\qquad$ $-8x = -3\,200$

$$x = \frac{-3200}{-8}$$
$$x = 400$$

Para que la utilidad sea nula se deben fabricar y vender 400 bolsas.

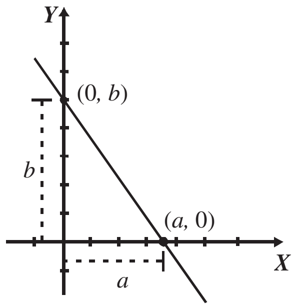
d) La representación gráfica es:



Ecuación de la recta en su forma simétrica

Una recta cuyas intersecciones con los ejes X y Y son a y b con $a \neq 0$ y $b \neq 0$ se representa por:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$



Donde:

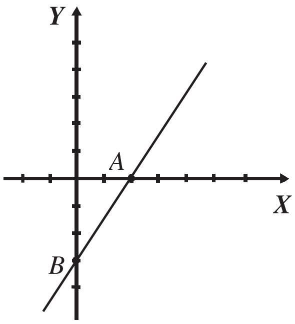
a: abscisa al origen
(Representa la intersección con el eje X)
b: ordenada al origen
(Representa la intersección con el eje Y)

EJEMPLOS

1 Encuentra la ecuación general de la recta, cuyas intersecciones con los ejes son los puntos $A(2, 0)$ y $B(0, -3)$.

Solución

En este caso $a = 2$ y $b = -3$, entonces al sustituir en la forma simétrica, se obtiene:



$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{-3}=1$$

$$6\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{-3}=1\right)$$ Se multiplica por 6 la ecuación para eliminar los denominadores

$$3x - 2y = 6$$

$$3x - 2y - 6 = 0$$

Por tanto, la ecuación general de la recta es: $3x - 2y - 6 = 0$.

2 Determina la ecuación general de la recta, cuyas intersecciones con los ejes son los puntos $(-1, 0)$ y $(0, 5)$.

Solución

En este caso, $a = -1$ y $b = 5$, entonces:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \rightarrow \frac{x}{-1}+\frac{y}{5}=1$$ Se multiplica por 5 ambos miembros

$$-5x + y = 5$$ Se acomodan los términos

$$5x - y + 5 = 0$$

Por consiguiente, la ecuación general de la recta es: $5x - y + 5 = 0$.

Transformación de la ecuación general a la forma simétrica

Para transformar la ecuación $Ax + By + C = 0$ a la forma $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, se realizan los siguientes pasos:

$$Ax + By + C = 0$$

$$Ax + By = -C$$ El término independiente se pasa al segundo miembro.

$$\frac{Ax}{-C}+\frac{By}{-C}=\frac{-C}{-C}$$ Se divide la expresión por el término independiente.

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1$$ Se obtiene que $a=-\frac{C}{A}$ y $b=-\frac{C}{B}$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Transforma a la forma simétrica y determina las intersecciones con los ejes de la recta:

$$2x + 3y - 6 = 0$$

Solución

La ecuación está en la forma general, al comparar con $Ax + By + C = 0$, se obtienen los valores de A, B y C, éstos son:

$$A = 2,\ B = 3 \text{ y } C = -6$$

Para encontrar las intersecciones se sustituye en:

$$a = -\frac{C}{A} \text{ y } b = -\frac{C}{B}$$

Entonces,

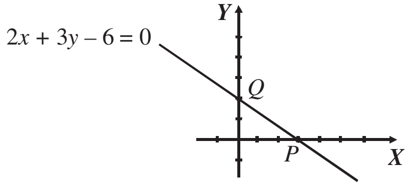
$$a = -\frac{(-6)}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ y } b = -\frac{(-6)}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

En consecuencia, la ecuación en su forma simétrica es: $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$.

Las intersecciones con los ejes son:

con el eje X el punto: $P(3, 0)$ con el eje Y el punto: $Q(0, 2)$

Al graficar y unir estos puntos en el plano cartesiano, se obtiene la gráfica de la ecuación $2x + 3y - 6 = 0$.



2 Una recta pasa por los puntos (2, 5) y (– 1, 4). Expresa su forma simétrica.

Solución

Primero se sustituyen los puntos en la ecuación para encontrar la ecuación general:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad \rightarrow \quad y - 5 = \frac{4-5}{-1-2}(x-2)$$

$$y - 5 = \frac{1}{3}(x - 2)$$

$$3(y - 5) = 1(x - 2)$$

$$3y - 15 = x - 2$$

$$-x + 2 + 3y - 15 = 0$$

$$-x + 3y - 13 = 0$$

$$x - 3y + 13 = 0$$

Esta ecuación se encuentra en su forma general y los valores de A, B y C, son:

$$A = 1,\ B = -3 \text{ y } C = 13$$

Al sustituir en $a = -\frac{C}{A}$ y $b = -\frac{C}{B}$, se determina que:

$$a = \frac{-13}{1} = -13 \text{ y } b = \frac{-13}{-3} = \frac{13}{3}$$

Finalmente, la ecuación de la recta en la forma simétrica es:

$$\frac{x}{-13} + \frac{y}{\frac{13}{3}} = 1$$

3 Transforma la ecuación general de la recta $2x + 5y - 12 = 0$ a su forma simétrica.

Solución

$$2x + 5y - 12 = 0 \quad \rightarrow \quad 2x + 5y = 12$$

$$\frac{2x}{12} + \frac{5y}{12} = \frac{12}{12}$$

$$\frac{\frac{2x}{2}}{\frac{12}{2}} + \frac{\frac{5y}{5}}{\frac{12}{5}} = 1$$

$$\text{Forma simétrica: } \frac{x}{6} + \frac{y}{\frac{12}{5}} = 1$$

EJERCICIO 15

Transforma a la forma ordinaria y simétrica las siguientes ecuaciones:

1. $x + y - 4 = 0$
2. $2x - 5y + 5 = 0$
3. $x - 3y + 8 = 0$
4. $2x - y = 0$
5. $x + 8y = 4$
6. $-3x + 4y = -12$
7. $3x + 5y - 10 = 0$
8. $\frac{1}{2}x + 3y + 5 = 0$
9. $-\frac{2}{5}x + \frac{1}{3}y = 4$
10. $x \cos \omega + y \operatorname{sen} \omega - p = 0$

Grafica las siguientes ecuaciones:

11. $y = -3x + 1$
12. $y = 2x - 3$
13. $y = -\frac{3}{4}x + 1$
14. $y = \frac{2}{3}x$
15. $4x - y - 2 = 0$
16. $x + 3y - 5 = 0$
17. $x - y = 0$
18. $\frac{3}{2}x + 3y - 6 = 0$

19. Determina la ecuación de la recta, cuya ordenada al origen es -5 y su inclinación es de 135°.
20. Una recta de pendiente 2 pasa por el punto $A(-1,2)$. Expresa su ecuación en la forma ordinaria.
21. ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(6, -7)$ y tiene pendiente -3 en su forma ordinaria?
22. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(1, 2)$ y $B(-5, 3)$ en su forma ordinaria.
23. Una recta tiene intersecciones con los ejes en los puntos $A(-1, 0)$ y $B(0, 5)$. Obtén su ecuación en su forma ordinaria.
24. Una recta pasa por el punto $(-1, 5)$ y es paralela a la recta con ecuación $5x - 3y + 7 = 0$. ¿Cuál es su ecuación?
25. Determina la ecuación general de la recta que pasa por el punto $(2, 7)$ y es perpendicular a la recta con ecuación $x - 4y + 7 = 0$.
26. Obtén la ecuación general de la recta que pasa por el punto $A(2, 3)$ y es paralela a la recta $x - y + 2 = 0$.
27. ¿Cuál es la ecuación de la recta perpendicular que pasa por el punto medio de las intersecciones con los ejes de la recta $2x - 3y + 6 = 0$?
28. Determina la ecuación general de la recta perpendicular a la recta $2x + 3y - 7 = 0$ y pasa por la intersección de las rectas $x + y - 7 = 0$ y $2x - 3y + 1 = 0$.

29. Encuentra la medida del ángulo obtuso formado por las rectas:

$$x + 3y - 6 = 0 \text{ y } 2y - 3 = 0$$

30. Los lados de un triángulo están formados por las rectas:

$$x - 6y + 15 = 0;\ 5x + 2y - 21 = 0;\ x + 2y - 1 = 0$$

¿Cuál es la medida de sus ángulos interiores?

31. La posición de una partícula está dada por la expresión:

$$y = \frac{3}{4}x - 2$$

Donde x e y están dados en metros, ¿cuál es su posición cuando $x = 20\ m$?

32. Un fabricante de pantalones tiene gastos fijos de \$30 000 mensuales y por cada pantalón elaborado invierte \$50 más.
    a) ¿Cuál es la ecuación de gastos del fabricante?
    b) ¿Cuánto invierte en la producción de 800 pantalones?
    (Considera x = número de pantalones fabricados, y = gasto total)

33. Para un tiempo de 5 segundos, un cuerpo posee una velocidad de $3\frac{m}{s}$, y para 8 segundos su velocidad es de $15\frac{m}{s}$.
    a) ¿Cuál es su aceleración?
    b) ¿Qué velocidad tendrá para un tiempo de 12 segundos?

34. Un restaurante debe invertir diariamente \$6 000 en gastos fijos, más \$30 por cada comida servida, si todos los platillos servidos tienen un precio al público de \$80, obtén:
    a) La función de costo total del restaurante por día.
    b) ¿Cuál es la utilidad obtenida, si vende en un día 140 platillos?
    c) Si sólo vende 90 platillos, ¿obtiene ganancias?
    d) ¿Cuántos platillos debe vender para que no exista utilidad?

35. Representa la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(3, -2)$ y tiene un ángulo de inclinación de 45° en su forma simétrica.

36. Una recta tiene pendiente $\frac{1}{2}$ y su intersección con el eje Y es -4. Representa su ecuación en la forma simétrica.

37. Una recta pasa por los puntos $A(-3, 1)$ y $B(2, -2)$. Encuentra su ecuación en la forma simétrica.

38. Obtén la ecuación de la recta en su forma simétrica si pasa por la intersección con el eje Y de la recta $x + 2y - 7 = 0$ y es perpendicular a la misma.

39. Determina la ecuación de la recta en su forma simétrica si pasa por la intersección de las rectas, $2x + y - 5 = 0$ y $3x - 4y - 2 = 0$, y es paralela a la recta que pasa por los puntos $(-1, 1)$ y $(3, 6)$.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Familia de rectas

Se denomina familia de rectas al conjunto de rectas que satisfacen una condición geométrica; se clasifican en:

Rectas paralelas

Satisfacen la condición $y = mx + b$, donde b es el parámetro. Este tipo de rectas tienen la misma pendiente.

Ejemplo

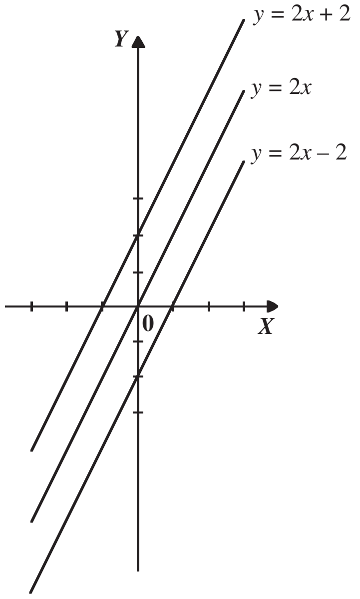
Representa gráficamente la familia de rectas, $y = 2x + b$, con $b = -2, 0, 2$.

Solución

Se sustituyen los valores del parámetro b en la ecuación y se obtienen las siguientes rectas:

$$y = 2x - 2,\ y = 2x,\ y = 2x + 2$$

Cuya representación gráfica es:



Rectas concurrentes

Satisfacen la condición $y = mx + b$, donde m es el parámetro; esto es, las rectas coinciden en la intersección con el eje Y.

Ejemplo

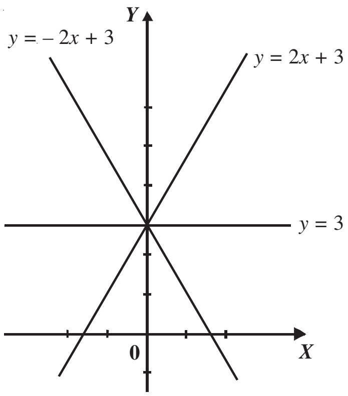
Representa gráficamente la familia de rectas, $y = mx + 3$, con $m = -2, 0, 2$.

Solución

Se sustituyen los valores de m y se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$y = -2x + 3,\ y = 3,\ y = 2x + 3$$

Cuya representación gráfica es:



EJERCICIO 16

Representa gráficamente las siguientes familias de rectas:

1. $y=\frac{1}{2}x+b$
2. $y = mx + 1$
3. $y=-\frac{2}{3}x+b$
4. $y=mx-\frac{1}{2}$
5. $y = x + b$
6. $y = mx$
7. $y = -2x + b$
8. $y=mx+\frac{4}{3}$
9. $y = mx - 1$
10. $y=-\frac{4}{5}x+b$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Ecuación de la recta en su forma normal

Sea $\overline{OP_1}$ un segmento perpendicular a la recta $Ax + By + C = 0$ de longitud p, y ω el ángulo determinado por el segmento y el eje X.

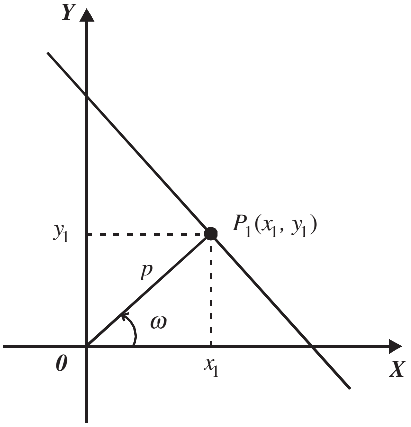
De la figura se obtiene:

$$sen\ \omega = \frac{y_1}{p} \rightarrow y_1 = p\ sen\ \omega$$

$$cos\ \omega = \frac{x_1}{p} \rightarrow x_1 = p\ cos\ \omega$$

Luego, la pendiente del segmento $\overline{OP_1}$ es:

$$m = tan\ \omega = \frac{y_1}{x_1} = \frac{p\ sen\ \omega}{p\ cos\ \omega} = \frac{sen\ \omega}{cos\ \omega}$$



Entonces, las coordenadas de P_1 son ($p\ cos\ \omega$, $p\ sen\ \omega$) y la pendiente, de la recta:

$Ax + By + C = 0$ es:

$$m = -\frac{cos\ \omega}{sen\ \omega}$$

Al sustituir P_1 y m en la ecuación de la recta punto pendiente se obtiene la ecuación de la recta en su forma normal:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \rightarrow \quad y - p\ sen\ \omega = -\frac{cos\ \omega}{sen\ \omega}(x - p\ cos\ \omega)$$

$$y\ sen\ \omega - p\ sen^2\ \omega = -x\ cos\ \omega + p\ cos^2\ \omega$$

$$x\ cos\ \omega + y\ sen\ \omega - p\ sen^2\ \omega - p\ cos^2\ \omega = 0$$

$$x\ cos\ \omega + y\ sen\ \omega - p(sen^2\ \omega + cos^2\ \omega) = 0$$

Pero $sen^2\omega + cos^2\omega = 1$, entonces:

$$x \cos\omega + y \sin\omega - p = 0$$

Se concluye que una recta en su forma general $Ax + By + C = 0$, se puede expresar en su forma normal como:

$$x \cos\omega + y \sin\omega - p = 0$$

Donde:

p: longitud del segmento $\overline{OP_1}$ y ω: ángulo de inclinación del segmento de recta que parte del origen, perpendicular a la recta normal.

Transformación de la ecuación general a la forma normal

Sean $Ax + By + C = 0$ y $x \cos\omega + y \sin\omega - p = 0$, las ecuaciones de una misma recta en su forma general y normal, respectivamente, entonces los coeficientes de ambas ecuaciones son iguales o proporcionales, por tanto:

$$\frac{\cos\omega}{A} = \frac{\sin\omega}{B} = \frac{-p}{C}, \text{ con } K = \frac{-p}{C}$$

Entonces, K es la constante de proporcionalidad y en estas condiciones:

$$\cos\omega = KA \qquad \sin\omega = KB \qquad -p = KC$$

Al elevar al cuadrado y sumar las dos primeras igualdades se determina que:

$$\cos^2\omega + \sin^2\omega = K^2A^2 + K^2B^2 = K^2(A^2 + B^2)$$

$$1 = K^2(A^2 + B^2)$$

$$\frac{1}{A^2 + B^2} = K^2$$

$$K = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Con $r = \pm\sqrt{A^2 + B^2}$ (radical).

Los valores de $\cos\omega$, $\sin\omega$ y p están dados por:

$$\cos\omega = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}};\ \sin\omega = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \text{ y } p = \frac{-C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Por consiguiente, la forma normal de $Ax + By + C = 0$ es:

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

Los signos de r (radical) se consideran de la siguiente manera:

Si $C \neq 0$, entonces el radical tendrá signo opuesto al de C.

Si $C = 0$, el signo del radical se considerará igual al de B.

Si $C = B = 0$, el signo del radical tendrá igual signo que A.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Reduce a la forma normal la siguiente ecuación de la recta $\sqrt{3}x + y - 9 = 0$ y determina el valor de p y del ángulo ω.

Solución

La forma normal de $Ax + By + C = 0$ es:

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = 0$$

Se obtienen los coeficientes de la recta:

$$A = \sqrt{3},\ B = 1 \text{ y } C = -9$$

Luego, con los valores de A y B se obtiene el radical $\sqrt{A^2+B^2}$

$$\sqrt{A^2+B^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

Como C es negativa, entonces $\sqrt{A^2+B^2}$ se toma con signo positivo, por consiguiente, la ecuación en su forma normal es:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{9}{2} = 0$$

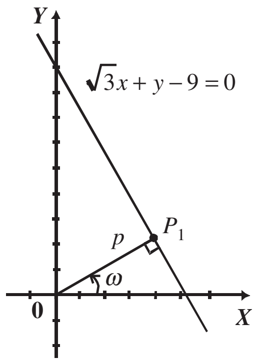
De aquí se obtiene:

$$\cos\omega = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \operatorname{sen}\omega = \frac{1}{2} \text{ y } p = \frac{9}{2}$$

Como $\operatorname{sen}\omega$ y $\cos\omega$ son ambos positivos; ω está en el primer cuadrante, entonces los valores de p y ω están determinados por:

$$p = \frac{9}{2} \text{ y } \omega = 30°$$

Gráficamente se representa como:



Donde: $p = \frac{9}{2}$ y $\omega = 30°$ y la ecuación en su forma normal es:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{9}{2} = 0$$

2 Reduce a la forma normal la siguiente ecuación de la recta $3x - 4y - 6 = 0$ y encuentra el valor de p y ω.

Solución

Con el valor de los coeficientes $A = 3$, $B = -4$ y $C = -6$, se obtiene el radical:

$$\sqrt{A^2+B^2} = \sqrt{(3)^2+(-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

Debido a que C es negativo, entonces $\sqrt{A^2+B^2}$ es positivo, por tanto, la ecuación normal se expresa de la siguiente forma:

$$\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{6}{5} = 0$$

De esta ecuación se determina que:

$$cos\ \omega = \frac{3}{5},\ sen\ \omega = -\frac{4}{5} \text{ y } p = \frac{6}{5}$$

Luego, para obtener el ángulo se despeja w de cualquiera de las dos funciones trigonométricas:

$$sen\ \omega = -\frac{4}{5} \rightarrow \omega = arc\ sen\left(-\frac{4}{5}\right)$$

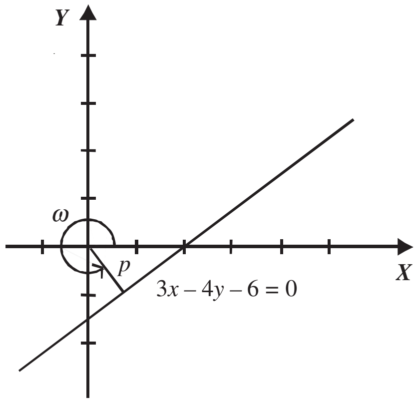
$$\omega = arc\ sen\ (-0.8) = -53°\ 7'$$

Como $cos\ \omega$ es positivo y $sen\ \omega$ es negativo, ω está en el cuarto cuadrante, por tanto:

$$\omega = 360° - 53°\ 07'$$

$$\omega = 306°\ 53'$$

Gráfica:



Donde: $p = \frac{6}{5}$ y $\omega = 306°\ 53'$ y la ecuación en su forma normal es:

$$\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{6}{5} = 0$$

EJERCICIO 17

Expresa en su forma normal las siguientes rectas:

1. $2x + 3y - 5 = 0$
2. $x - y + 5 = 0$
3. $5x + 3y = 0$
4. $x - 3y + 7 = 0$
5. $12x + 5y = -13$
6. $\sqrt{5}x + 2y - 1 = 0$

Determina la ecuación de la recta en su forma normal si se conoce *w* y *p*.

7. $\omega = 30°$ y $p = 4$
8. $\omega = 45°$ y $p = \sqrt{2}$
9. $\omega = 60°$ y $p = 3$
10. $\omega = 120°$ y $p = 1$
11. $\omega = 180°$ y $p = \sqrt{3}$
12. $\omega = 150°$ y $p = 5$
13. $\omega = 225°$ y $p = 3\sqrt{2}$
14. $\omega = 300°$ y $p = 4\sqrt{3}$
15. Una recta es tangente a un círculo con centro en el origen y radio 2. Si el punto de tangencia es $(1, -\sqrt{3})$, ¿cuál es la ecuación de la recta en su forma normal?
16. ¿Cuál es la ecuación de la recta en forma normal, que pasa por el punto $A(1, 2)$ y es paralela a la recta $2x + 5y - 10 = 0$?
17. Expresa la ecuación de la recta $3x + ky + 7 = 0$ en su forma normal, cuando pasa por el punto $(-3, 2)$.
18. Encuentra la medida de los ángulos formados por las rectas con ecuaciones:

$$x \cos 330° + y \operatorname{sen} 330° - 1 = 0$$

$$x \cos 210° + y \operatorname{sen} 210° - 2 = 0$$

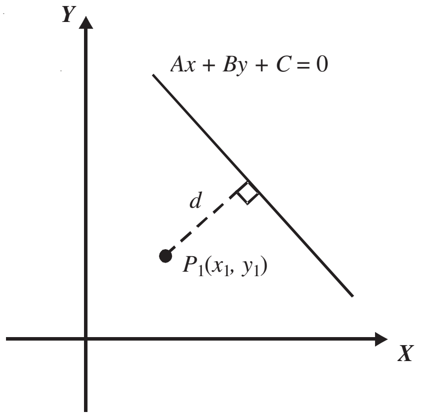
19. Determina la ecuación de la recta, cuya distancia al origen es $\frac{12}{5}$ u y pasa por el punto $A(0, -3)$.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Distancia de un punto a una recta

Es la longitud del segmento perpendicular a la recta trazado a partir del punto.

La distancia del punto $P_1(x_1, y_1)$ a la recta $Ax + By + C = 0$, está determinada por la fórmula:



$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

EJEMPLOS

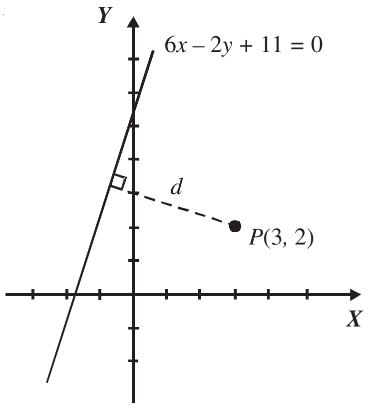
Ejemplos

1 Encuentra la distancia del punto $A(3, 2)$ a la recta $6x - 2y + 11 = 0$.

Solución

Se sustituyen las coordenadas del punto A y los coeficientes de la ecuación en la fórmula:

$$d = \frac{|\,6(3)-2(2)+11\,|}{\sqrt{(6)^2+(-2)^2}} = \frac{|\,18-4+11\,|}{\sqrt{36+4}} = \frac{|\,25\,|}{\sqrt{40}} = \frac{|\,25\,|}{\sqrt{4(10)}} = \frac{25}{2\sqrt{10}}$$



Finalmente, la distancia es: $\frac{25}{2\sqrt{10}} = \frac{5}{4}\sqrt{10}u$.

2 ¿Cuál es la longitud de la altura de un triángulo, cuyos vértices son los puntos $A(1, -2)$, $B(7, 0)$ y $C(3, 3)$, del vértice A sobre el lado $\overline{BC}$?

Solución

Se determina la ecuación de la recta que pasa por los vértices B y C:

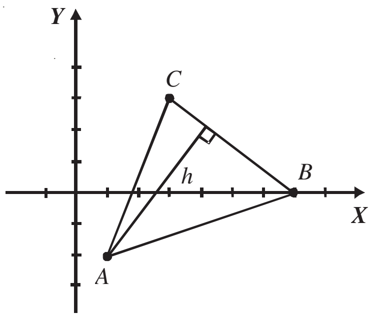
$$y - 0 = \frac{3-0}{3-7}(x-7)$$

$$y = -\frac{3}{4}(x-7)$$

$$4y = -3(x-7)$$

$$4y = -3x + 21$$

$$3x + 4y - 21 = 0$$



La longitud de la altura es la distancia que existe del vértice $A(1, -2)$ a la recta $3x + 4y - 21 = 0$, entonces, al sustituir en la fórmula se obtiene:

$$h = \frac{|3(1)+4(-2)-21|}{\sqrt{(3)^2+(4)^2}} = \frac{|3-8-21|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|-26|}{5} = \frac{26}{5} = 5.2u$$

Por consiguiente, la altura es de $5.2u$.

3 Encuentra el área del triángulo formado por los puntos $A(-2, 3)$, $B(1, -1)$ y $C(3, 4)$.

Solución

Se determina la ecuación de uno de los lados, en este caso $\overline{AB}$.

$$y-3=\frac{-1-3}{1-(-2)}(x-(-2))\rightarrow y-3=\frac{-4}{3}(x+2)\rightarrow 3y-9=-4x-8\rightarrow 4x+3y-1=0$$

La longitud de la altura es la distancia del punto $C(3, 4)$ a la recta $4x + 3y - 1 = 0$

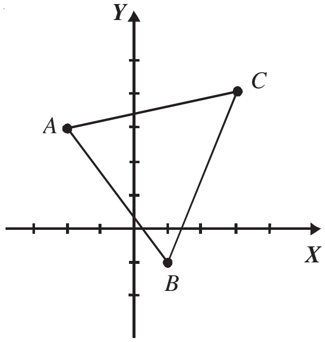
$$h=\frac{|4(3)+3(4)-1|}{\sqrt{(4)^2+(3)^2}}=\frac{|12+12-1|}{\sqrt{16+9}}=\frac{|23|}{5}=\frac{23}{5}$$

La base del triángulo es la longitud del lado $\overline{AB}$.

$$\overline{AB}=\sqrt{(1-(-2))^2+(-1-3)^2}=\sqrt{9+16}=5$$

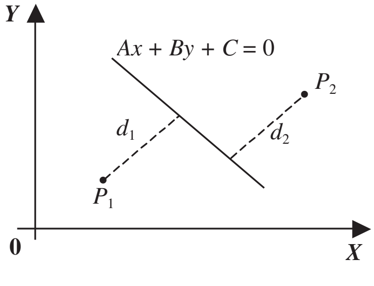
Entonces, el área del triángulo es:

$$A=\frac{1}{2}bh=\frac{1}{2}(5)\left(\frac{23}{5}\right)=\frac{23}{2}u^2$$



Distancia dirigida.

La distancia dirigida permite conocer la localización de un punto con respecto a una recta y al origen.



$$d=\pm\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Casos:

Si la recta no pasa por el origen:

- La distancia que existe del punto a la recta es positiva si el punto y el origen se encuentran en regiones opuestas respecto a la recta.
- Si el punto y el origen se encuentran en la misma región respecto a la recta, entonces se toma el signo negativo para indicar el sentido en el que se está tomando la distancia.

Si la recta pasa por el origen:

- La distancia del punto a la recta es positiva si el punto se encuentra por encima o en la región de arriba respecto a la recta.
- Si el punto se encuentra por debajo o en la región de abajo respecto a la recta, entonces se toma el signo negativo para indicar el sentido en el que se está tomando la distancia.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es la distancia dirigida que existe del punto $P(3, -1)$ a la recta $3x - 2y - 6 = 0$?

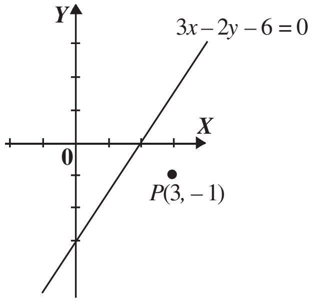
Solución

Se grafican la recta y el punto:

Se observa que el punto P y el origen se encuentran en regiones opuestas respecto a la recta, por consiguiente, la distancia es positiva e igual a:

$$d = \frac{|3(3) - 2(-1) - 6|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}}$$

$$d = \frac{|5|}{\sqrt{13}} = \frac{5}{\sqrt{13}} = \frac{5\sqrt{13}}{13}u$$



2 Determina la distancia dirigida del punto $Q(-4, -2)$ a la recta $x + 4y = 0$.

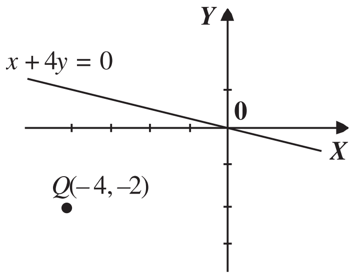
Solución

Se determina la posición del punto respecto a la recta:

El punto Q se encuentra por debajo de la recta, por tanto, la distancia dirigida es negativa e igual a:

$$d = -\frac{|-4 + 4(-2)|}{\sqrt{1^2 + 4^2}}$$

$$d = -\frac{|-12|}{\sqrt{17}} = -\frac{12}{\sqrt{17}} = -\frac{12\sqrt{17}}{17}u$$



3 Determina la ecuación de la recta que dista 2 unidades de la recta $4x + 3y - 6 = 0$.

Solución

Existen dos rectas paralelas a $4x + 3y - 6 = 0$, una se encuentra arriba y la otra abajo, se sustituyen los datos en la fórmula:

$$d = \frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad \rightarrow \qquad 2 = \frac{4x + 3y - 6}{\pm\sqrt{4^2 + 3^2}}$$

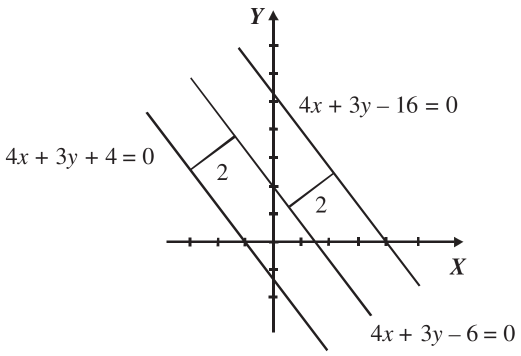
De la última ecuación se obtienen las ecuaciones de las rectas paralelas:

$$2 = \frac{4x + 3y - 6}{5} \qquad\qquad 2 = \frac{4x + 3y - 6}{-5}$$

$$10 = 4x + 3y - 6 \qquad\qquad -10 = 4x + 3y - 6$$

$$4x + 3y - 16 = 0 \qquad\qquad 4x + 3y + 4 = 0$$

Gráficamente se representan de la siguiente manera:



Distancia entre rectas paralelas

Para calcular la distancia entre dos rectas paralelas, se determina un punto en cualquiera de las rectas, después se calcula la distancia de ese punto a la otra recta.

Ejemplo

Encuentra la distancia entre las rectas paralelas $2x + 3y + 1 = 0$ y $2x + 3y - 6 = 0$.

Solución

La pendiente de ambas rectas es igual a $-\frac{2}{3}$, por tanto son paralelas.

Se determina un punto cualquiera sobre la recta $2x + 3y - 6 = 0$

$$\text{Si } x = 0,\ 2(0) + 3y - 6 = 0$$

$$3y - 6 = 0$$

$$3y = 6$$

$$y = \frac{6}{3}$$

$y = 2$, se obtiene el punto $(0, 2)$

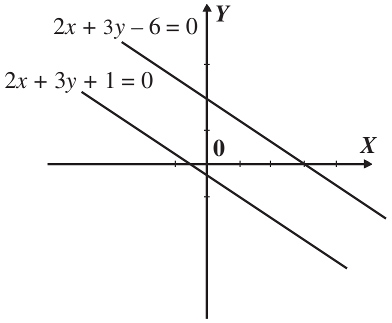
Se aplica la fórmula para obtener la distancia del punto (0, 2) a la recta $2x + 3y + 1 = 0$:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|(2)(0) + (3)(2) + 1|}{\sqrt{(2)^2 + (3)^2}} = \frac{|0 + 6 + 1|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{7}{\sqrt{13}}$$

Al racionalizar el denominador:

$$\frac{7}{\sqrt{13}} = \frac{7}{\sqrt{13}} \cdot \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \frac{7\sqrt{13}}{\left(\sqrt{13}\right)^2} = \frac{7\sqrt{13}}{13}$$

De acuerdo con lo anterior la distancia entre las rectas es: $\frac{7\sqrt{13}}{13}$ unidades.



EJERCICIO 18

Determina la distancia del punto dado a la recta indicada:

1. $P(1, 4)$; $2x - 7y + 3 = 0$
2. $P(-2, 5)$; $3x + 4y - 5 = 0$
3. $P(0, -4)$; $x + y - 6 = 0$
4. $P(-1, 7)$; $12x + 5y + 26 = 0$
5. $P(3, 0)$; $x - y + 4 = 0$
6. $P(-4, 0)$; $x + 3 = 0$
7. $P(-2, -5)$; $x + 4y - 10 = 0$
8. $P(-3, -7)$; $y - 3 = 0$
9. Encuentra la altura correspondiente al lado $\overline{BC}$ del triángulo, cuyos vértices son los puntos $A(-3, 2)$, $B(5, 8)$ y $C(1, -4)$.
10. ¿Cuál es el área del triángulo, cuyos vértices son los puntos $A(0, 0)$, $B(2, 4)$ y $C(6, 7)$?
11. Una circunferencia tiene su centro en (2, 3) y es tangente a la recta $3x + 4y - 25 = 0$. Determina el radio de la circunferencia.
12. Obtén el valor de k para que la distancia de la recta $x + ky - 5 = 0$ al punto (3, 2) sea igual a $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Encuentra la distancia dirigida del punto dado a la recta indicada:

13. $P(2, -1)$; $2x - 3y - 5 = 0$
14. $P(-3, 2)$; $3x + 4y + 7 = 0$
15. $P(-2, 5)$; $3x + 4y = 0$
16. $P\left(3, -\frac{1}{2}\right)$; $5x + 2y - 3 = 0$
17. $P\left(\frac{1}{3}, -\frac{3}{4}\right)$; $6x + 8y - 3 = 0$
18. $P\left(-5, -\frac{3}{4}\right)$; $x + y - 1 = 0$
19. ¿Cuáles son las ecuaciones de las rectas paralelas a $3x - 4y + 5 = 0$ y que se encuentran a tres unidades de distancia?

20. La distancia dirigida de $P(-2, y)$ a la recta con ecuación $x + 4y - 5 = 0$, es 4 unidades. Encuentra la ordenada de P.
21. ¿Qué distancia existe entre las rectas paralelas $2x + y - 6 = 0$ y $2x + y + 1 = 0$?
22. Obtén la distancia que existe entre las rectas paralelas $x - 2y + 5 = 0$ y $3x - 6y + 4 = 0$.
23. ¿Cuál es la ecuación de la recta paralela a $x - y - 3 = 0$, y que dista 3 unidades de ella?
24. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por (2, 3) y que la distancia de esta recta al punto (– 2, 3) sea igual a $\frac{8\sqrt{5}}{5}$.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Rectas notables en el triángulo

En todo triángulo se trazan las siguientes rectas:

Mediatriz

Recta perpendicular a un segmento que pasa por su punto medio. En un triángulo el punto de intersección de las mediatrices se conoce como *circuncentro*.

Ejemplo

¿Cuál es la ecuación de la mediatriz del segmento cuyos extremos son los puntos $A(-3, 0)$ y $B(1, 1)$?

Solución

Se obtiene el punto medio y la pendiente del segmento $\overline{AB}$.

$$P_m\left(\frac{-3+1}{2}, \frac{0+1}{2}\right) = P_m\left(-1, \frac{1}{2}\right) \qquad m = \frac{1-0}{1-(-3)} = \frac{1}{4}$$

Para obtener la pendiente de la mediatriz se aplica la condición de perpendicularidad y se obtiene:

$$m \cdot m' = -1 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{4} \cdot m' = -1 \quad \rightarrow \quad m' = -4$$

Se sustituyen las coordenadas del punto medio y m' en la ecuación punto pendiente de la recta y se obtiene la ecuación de la mediatriz:

$$y - \frac{1}{2} = -4(x-(-1)) \quad \rightarrow \quad y - \frac{1}{2} = -4x - 4 \quad \rightarrow \quad 4x + y + \frac{7}{2} = 0$$

$$8x + 2y + 7 = 0$$

Por consiguiente, la ecuación de la mediatriz es: $8x + 2y + 7 = 0$.

Mediana

Segmento de recta que une un vértice de un triángulo con el punto medio del lado opuesto. El punto de intersección de las medianas es el *baricentro* (*centro de gravedad*).

Ejemplo

Para el triángulo determinado por los vértices $A(-3, 1)$, $B(1, 4)$ y $C(5, -3)$, determina la ecuación de la mediana trazada desde el vértice B al lado $\overline{AC}$.

Solución

Se obtiene el punto medio del segmento $\overline{AC}$:

$$P_m\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{1+(-3)}{2}\right) = P_m(1, -1)$$

Con el punto medio y las coordenadas del vértice B, se aplica la ecuación de la recta por dos puntos para obtener la ecuación de la mediana:

$$y-4=\frac{-1-4}{1-1}(x-1) \quad \rightarrow \quad y-4=\frac{-5}{0}(x-1) \quad \rightarrow \quad 0=x-1$$

Por tanto, la ecuación de la mediana trazada desde el vértice B al lado $\overline{AC}$ es: $x - 1 = 0$.

Altura

Recta trazada en forma perpendicular de un vértice al lado opuesto de un triángulo. El punto de intersección de las alturas es el *ortocentro*.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Los vértices de un triángulo son los puntos $A(2, 3)$, $B(-4, 0)$ y $C(0, -2)$, determina la ecuación de la altura trazada desde el vértice A.

Solución

Se obtiene la pendiente del lado $\overline{BC}$, y posteriormente la pendiente de la altura.

$$m=\frac{-2-0}{0-(-4)}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{2}m'=-1 \quad \rightarrow \quad m'=2$$

Se sustituyen las coordenadas del vértice A y la pendiente m' en la ecuación punto pendiente de la recta y se obtiene la ecuación de la altura buscada:

$$y-3=2(x-2) \qquad y-3=2x-4 \qquad 2x-y-1=0$$

2 Los vértices de un triángulo son $A(-2, 1)$, $B(4, 7)$ y $C(6, -3)$, determina:

a) Las ecuaciones de las medianas y las coordenadas de su punto de intersección.
b) Las ecuaciones y las coordenadas del punto de intersección de las mediatrices.
c) Las ecuaciones y el punto de intersección de las alturas.

Solución

a) Para las medianas se determinan los puntos medios de los lados del triángulo.

Punto medio $\overline{AB}$	Punto medio $\overline{BC}$	Punto medio $\overline{AC}$
$x=\frac{-2+4}{2}=\frac{2}{2}=1$	$x=\frac{4+6}{2}=\frac{10}{2}=5$	$x=\frac{-2+6}{2}=\frac{4}{2}=2$
$y=\frac{1+7}{2}=\frac{8}{2}=4$	$y=\frac{7+(-3)}{2}=\frac{4}{2}=2$	$y=\frac{1+(-3)}{2}=\frac{-2}{2}=-1$
$Pm\ \overline{AB}\ (1, 4)$	$Pm\ \overline{BC}\ (5, 2)$	$Pm\ \overline{AC}\ (2, -1)$

Para obtener las medianas se toma un vértice y el punto medio del lado opuesto.

Mediana del vértice A

Se toman los datos $A(-2, 1)$ y $Pm\ \overline{BC}\ (5, 2)$

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \quad \rightarrow \quad y-1=\frac{2-1}{5-(-2)}(x-(-2))$$

$$y-1=\frac{1}{7}(x+2)$$

$$7(y-1)=1(x+2)$$

$$7y-7=x+2$$

$$x+2-7y+7=0$$

$$x-7y+9=0$$

Mediana del vértice B

Se toman los datos $B(4, 7)$ y $Pm\ \overline{AC}\ (2, -1)$

$$y-7=\frac{-1-7}{2-4}(x-4) \rightarrow y-7=\frac{-8}{-2}(x-4)$$
$$y-7=4(x-4)$$
$$y-7=4x-16$$
$$4x-16-y+7=0$$
$$4x-y-9=0$$

Mediana del vértice C

Se toman los datos $C(6, -3)$ y $Pm\ \overline{AB}\ (1, 4)$

$$y-(-3)=\frac{4-(-3)}{1-6}(x-6) \rightarrow y+3=\frac{4+3}{-5}(x-6)$$
$$y+3=-\frac{7}{5}(x-6)$$
$$5(y+3)=-7(x-6)$$
$$5y+15=-7x+42$$
$$7x-42+5y+15=0$$
$$7x+5y-27=0$$

Para encontrar el baricentro, se realiza un sistema de ecuaciones entre dos medianas cualesquiera; en este caso se resuelve el sistema con las medianas del vértice A y C.

$$x-7y+9=0$$
$$7x+5y-27=0$$

Al resolver el sistema de ecuaciones se obtienen las coordenadas del punto de intersección.

$$\text{Baricentro}\left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

b) Para las mediatrices se determinan las pendientes de los lados del triángulo.

Pendiente del lado $\overline{AB}$

$$m_{\overline{AB}}=\frac{7-1}{4-(-2)}=\frac{6}{6}=1$$

Pendiente del lado $\overline{BC}$

$$m_{\overline{BC}}=\frac{-3-7}{6-4}=\frac{-10}{2}=-5$$

Pendiente del lado $\overline{AC}$

$$m_{\overline{AC}}=\frac{-3-1}{6-(-2)}=\frac{-4}{8}=-\frac{1}{2}$$

Se aplica la condición de perpendicularidad para encontrar las pendientes de las mediatrices.

Pendiente de la mediatriz sobre $\overline{AB}$ $\quad m_1=-\frac{1}{m_{\overline{AB}}}=-1$

Pendiente de la mediatriz sobre $\overline{BC}$ $\quad m_2=-\frac{1}{m_{\overline{BC}}}=\frac{1}{5}$

Pendiente de la mediatriz sobre $\overline{AC}$ $\quad m_3=-\frac{1}{m_{\overline{AC}}}=2$

Mediatriz sobre el lado AB

Se toma el punto medio $(1, 4)$ de $\overline{AB}$ y $m_1=-1$

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-4=-1(x-1)$$
$$y-4=-x+1$$
$$x-1+y-4=0$$
$$x+y-5=0$$

Mediatriz sobre el lado BC

Se toma el punto medio (5, 2) de $\overline{BC}$, $m_2 = \frac{1}{5}$ y se sustituye en: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 2 = \frac{1}{5}(x - 5)$$

$$5(y - 2) = 1(x - 5)$$

$$5y - 10 = x - 5$$

$$x - 5 - 5y + 10 = 0$$

$$x - 5y + 5 = 0$$

Mediatriz sobre el lado AC

Se toma el punto medio (2, –1) de $\overline{AC}$, $m_3 = 2$ y se sustituye en: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y + 1 = 2(x - 2)$$

$$y + 1 = 2x - 4$$

$$2x - 4 - y - 1 = 0$$

$$2x - y - 5 = 0$$

Para encontrar las coordenadas del circuncentro se resuelve un sistema de ecuaciones con dos mediatrices cualesquiera:

$$x + y - 5 = 0$$

$$2x - y - 5 = 0$$

Al resolver, se obtiene el punto $\left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}\right)$

c) Con las pendientes perpendiculares de los lados y los vértices opuestos se obtienen las ecuaciones de las alturas.

Altura sobre el lado BC.

Se toma el vértice $A(-2, 1)$ y la pendiente perpendicular al lado BC, $m_2 = \frac{1}{5}$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \rightarrow \quad y - 1 = \frac{1}{5}(x + 2)$$

$$5(y - 1) = 1(x + 2)$$

$$5y - 5 = x + 2$$

$$x + 2 - 5y + 5 = 0$$

$$x - 5y + 7 = 0$$

Altura sobre el lado AC.

Se toma el vértice $B(4, 7)$ y la pendiente perpendicular al lado AC, $m_3 = 2$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \rightarrow \quad y - 7 = 2(x - 4)$$

$$y - 7 = 2x - 8$$

$$2x - 8 - y + 7 = 0$$

$$2x - y - 1 = 0$$

Altura sobre el lado AB

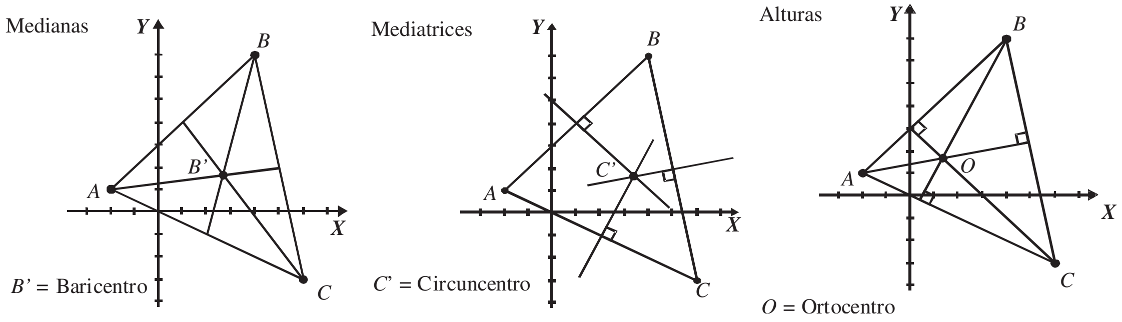
Se toma el vértice $C(6, -3)$ y la pendiente perpendicular al lado AB, $m_1 = -1$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \rightarrow \quad y + 3 = -1(x - 6)$$
$$y + 3 = -x + 6$$
$$x - 6 + y + 3 = 0$$
$$x + y - 3 = 0$$

Para encontrar las coordenadas del ortocentro se resuelve un sistema de ecuaciones con dos alturas cualesquiera:

$$2x - y - 1 = 0$$
$$x + y - 3 = 0$$

Al resolver, se obtiene el punto $\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$ que representa el ortocentro.



Bisectriz

Semirrecta que divide a un ángulo en dos ángulos iguales. En un triángulo, el punto de intersección de las bisectrices se conoce como *incentro*.

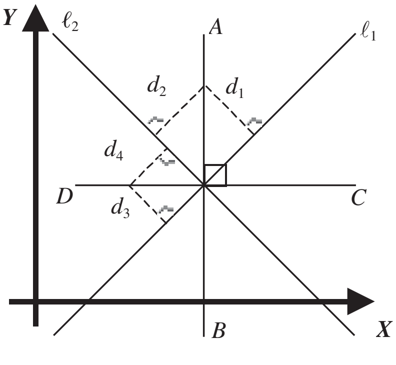
Ecuación de la bisectriz

Sean las rectas ℓ_1 y ℓ_2, donde: ℓ_1*:* $Ax + By + C = 0$*;* ℓ_2*:* $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, sus bisectrices son las rectas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, cuyas ecuaciones están dadas por la condición:

$$|d_1| = |d_2|$$

De la cual se obtiene:

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \pm\left[\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\pm\sqrt{A_1^{\,2} + B_1^{\,2}}}\right]$$



Los signos de las distancias se eligen de la siguiente manera:

- Las distancias son positivas si para un punto cualquiera $P(x, y)$ sobre la bisectriz, el origen y dicho punto se encuentran en regiones opuestas.
- Si para un punto cualquiera $P(x, y)$ sobre la bisectriz, el origen y dicho punto se encuentran en la misma región, se usa el signo negativo para indicar el sentido.

Los signos del radical se consideran de la siguiente manera:

- Si $C \neq 0$, entonces el radical tendrá signo opuesto al de C.
- Si $C = 0$, el signo del radical se considerará igual al de B.
- Si $C = B = 0$, el signo del radical tendrá igual signo que A.

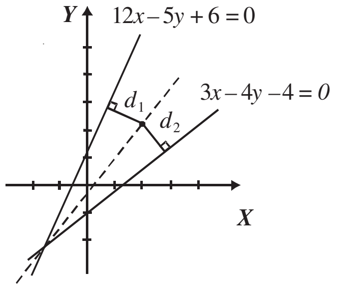
EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es la ecuación de la bisectriz del ángulo agudo formado por las rectas, $3x - 4y - 4 = 0$ y $12x - 5y + 6 = 0$?

Solución

Se traza la gráfica:



De la figura se obtiene que $-d_1 = -d_2$ ya que el punto $P(x, y)$ se encuentra en la misma región que el origen para ambas rectas, por tanto,

$$-d_1 = -d_2 \qquad \text{o bien} \qquad d_1 = d_2$$

Al sustituir en la fórmula

$$\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = \pm\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2}} \quad \rightarrow \quad \frac{12x-5y+6}{-\sqrt{(12)^2+(-5)^2}} = \frac{3x-4y-4}{\sqrt{(3)^2+(-4)^2}}$$

$$\frac{12x-5y+6}{-\sqrt{169}} = \frac{3x-4y-4}{\sqrt{25}}$$

$$5(12x - 5y + 6) = -13(3x - 4y - 4)$$

$$60x - 25y + 30 = -39x + 52y + 52$$

$$99x - 77y - 22 = 0$$

$$9x - 7y - 2 = 0$$

En consecuencia, la ecuación de la bisectriz del ángulo agudo es la recta $9x - 7x - 2 = 0$.

2 Determina las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos formados por la intersección de las rectas $x + 2y - 3= 0$, $x - 2y - 2 = 0$.

Solución

Al aplicar la definición se determina que las distancias se relacionan de la siguiente manera:

$$d_1 = d_2 \text{ y } d_1 = -d_2$$

Si $d_1 = d_2$, entonces:

$$\frac{x+2y-3}{\sqrt{(1)^2+(2)^2}}=\frac{x-2y-2}{\sqrt{(1)^2(-2)^2}}$$

$$\frac{x+2y-3}{\sqrt{5}}=\frac{x-2y-2}{\sqrt{5}}$$

$$x + 2y - 3 = x - 2y - 2$$

$$x + 2y - 3 - x + 2y + 2 = 0$$

$$4y - 1 = 0$$

Si $d_1 = -d_2$, entonces:

$$\frac{x+2y-3}{\sqrt{(1)^2+(2)^2}}=-\frac{x-2y-2}{\sqrt{(1)^2(-2)^2}}$$

$$\frac{x+2y-3}{\sqrt{5}}=-\frac{x-2y-2}{\sqrt{5}}$$

$$x + 2y - 3 = -x + 2y + 2$$

$$x + 2y - 3 + x - 2y - 2 = 0$$

$$2x - 5 = 0$$

Finalmente, las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos son:

$$4y - 1 = 0;\ 2x - 5 = 0$$

EJERCICIO 19

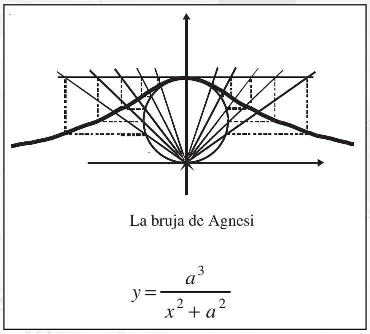
Resuelve los siguientes problemas:

1. Para el segmento definido por los puntos $A(2, -3)$ y $B(-6, 1)$, determina la ecuación de la mediatriz.
2. Determina la ecuación general de la mediatriz del segmento formado por los puntos $A(3, 2)$ y $B(1, 5)$.
3. Encuentra la ecuación de la bisectriz del ángulo agudo formado por las rectas:
$$\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1 \text{ y } y = 3$$
4. Obtén la ecuación de la bisectriz del ángulo obtuso formado por las rectas:
$$\frac{x}{3}+\frac{y}{-6}=1 \text{ y } -\frac{2}{\sqrt{5}}x-\frac{1}{\sqrt{5}}y-\frac{6}{\sqrt{5}}=0$$
5. Encuentra las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos formados por las rectas:
$$2x - y - 3 = 0 \text{ y } 2x + 4y + 5 = 0$$
6. Determina las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos que forman las rectas:
$$3x - 4y + 5 = 0 \text{ y } 12x + 5y - 3 = 0$$
7. Las ecuaciones de los lados de un triángulo son las rectas:
$$3x - 4y + 20 = 0;\ 4x + 3y - 25 = 0;\ 3x + 4y + 4 = 0$$
Obtén las ecuaciones de las bisectrices y su punto de intersección.

   Para el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(-1, 3)$, $B(3, 5)$ y $C(5, -7)$:
8. Encuentra las ecuaciones de las mediatrices y su punto de intersección.
9. Determina las ecuaciones de las alturas y su punto de intersección.
10. ¿Cuáles son las ecuaciones de las medianas y su punto de intersección?
11. Encuentra las ecuaciones de las bisectrices y su punto de intersección.
12. Obtén la ecuación de la recta de Euler (recta que pasa por el circuncentro, baricentro y ortocentro).

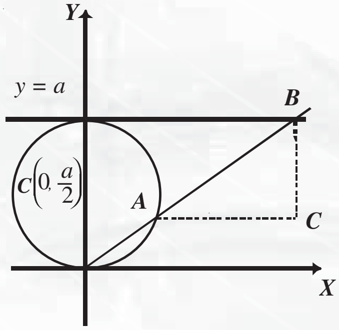
Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

La bruja de AGNESI



Construcción de la gráfica de la bruja de Agnesi

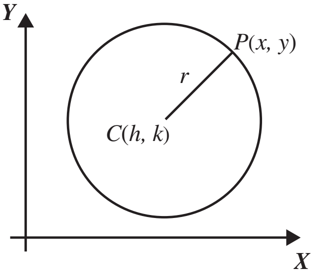
Se obtiene una circunferencia tangente al eje *X* con centro en el eje *Y* de coordenadas $\left(0, \frac{a}{2}\right)$, se traza una recta tangente a la circunferencia paralela al eje *X* con ecuación $y = a$, se traza una recta secante que corte a la circunferencia en *A* y a la recta $y = a$ en *B*, se construye el punto *C* con la abscisa del punto *B* y la ordenada del punto *A*, formando un triángulo rectángulo.



Cuando el punto *A* recorre toda la circunferencia y el punto *B* la recta tangente, se forma una curva a la cual se conoce como la bruja de Agnesi.

Definición

Es el lugar geométrico que describe un punto que se mueve en el plano de tal manera que su distancia a un punto fijo llamado centro, siempre es constante.



Definición:

$$d_{CP} = r \;\rightarrow\; \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

Elementos:

C: centro

r: radio

$P(x, y)$: punto cualquiera de la circunferencia

Ecuaciones de la circunferencia

Las formas de expresar la ecuación de una circunferencia son las siguientes:

Ecuación en su forma ordinaria

Ecuación de la circunferencia con centro en el punto $C(h, k)$ y radio r.

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Ecuación en su forma general

Esta ecuación se obtiene al desarrollar los binomios e igualar a cero la ecuación ordinaria.

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \text{ con } A = C$$

Ecuación en su forma canónica

Si el centro de la circunferencia se encuentra en el origen, entonces su ecuación es de la forma:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Análisis de la ecuación de una circunferencia

- Si r es positivo la circunferencia es real.
- Si r es negativo la circunferencia es imaginaria.
- Si r es igual a cero entonces representa un punto.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Una circunferencia tiene su centro en el origen y su radio es de 6 unidades. ¿Cuál es su ecuación en forma general?

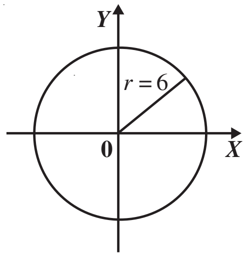
Solución

Se sustituye $r = 6$ en la forma canónica de la ecuación de la circunferencia y se transforma a la forma general:

$$x^2 + y^2 = 6^2$$

$$x^2 + y^2 = 36$$

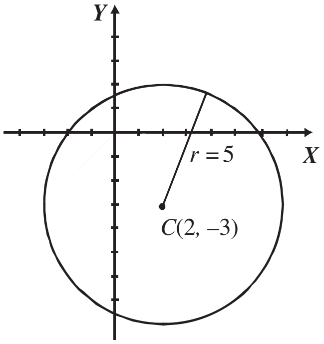
$$x^2 + y^2 - 36 = 0$$



2 Encuentra la ecuación general de la circunferencia con centro en (2, – 3) y radio 5.

Solución

Se sustituyen el centro y el radio en la ecuación ordinaria y se transforma a su forma general:



$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$
$$(x-2)^2+(y-(-3))^2=(5)^2$$
$$(x-2)^2+(y+3)^2=25$$
$$x^2-4x+4+y^2+6y+9=25$$
$$x^2+y^2-4x+6y-12=0$$

Se concluye que la ecuación general de la circunferencia es $x^2+y^2-4y+6y-12=0$

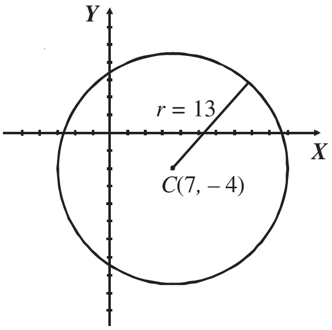
3 Determina la ecuación general de la circunferencia de centro en el punto (7, – 4) y que pasa por el punto (– 5, 1).

Solución

Por definición, la distancia del centro (7, – 4) al punto (– 5, 1) es el radio:

$$r=\sqrt{\left(7-(-5)\right)^2+\left(-4-1\right)^2}=\sqrt{144+25}=13$$

El centro $C(7,-4)$ y el radio $r=13$ se sustituyen en la ecuación ordinaria:



$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$
$$(x-7)^2+(y-(-4))^2=(13)^2$$
$$(x-7)^2+(y+4)^2=169$$
$$x^2-14x+49+y^2+8y+16-169=0$$
$$x^2+y^2-14x+8y-104=0$$

La ecuación en su forma ordinaria es $(x-7)^2+(y+4)^2=169$ y en su forma general, $x^2+y^2-14x+8y-104=0$

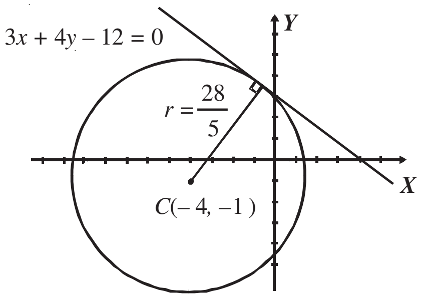
4 Obtén la ecuación general de la circunferencia con centro en (– 4, – 1) y que es tangente a la recta $3x + 4y - 12 = 0$.

Solución

El radio de la circunferencia es la distancia del centro a la recta tangente.

$$r=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|3(-4)+4(-1)-12|}{\sqrt{(3)^2+(4)^2}}=\frac{|-12-4-12|}{\sqrt{(3)^2+(4)^2}}=\frac{|-28|}{\sqrt{9+16}}=\frac{28}{\sqrt{25}}=\frac{28}{5}$$

Se sustituyen $r=\frac{28}{5}$ y el centro $C(-4,-1)$ en la forma ordinaria:



$$(x-(-4))^2+(y-(-1))^2=\left(\frac{28}{5}\right)^2$$

$$(x+4)^2+(y+1)^2=\frac{784}{25}$$

$$x^2+8x+16+y^2+2y+1=\frac{784}{25}$$

$$x^2+y^2+8x+2y-\frac{359}{25}=0$$

$$25x^2+25y^2+200x+50y-359=0$$

Por tanto, la ecuación general de la circunferencia es: $25x^2 + 25y^2 + 200x + 50y - 359 = 0$.

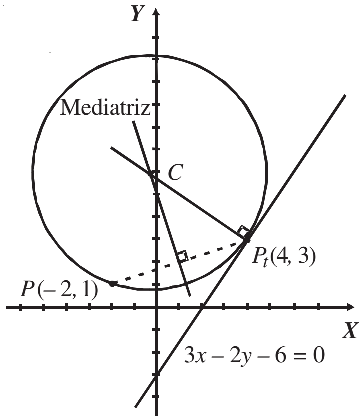
5 Determina la ecuación general de la circunferencia que pase por el punto (– 2, 1) y sea tangente a la recta $3x - 2y - 6 = 0$, en el punto (4, 3).

Solución

Se traza la gráfica:

El centro es el punto de intersección entre la mediatriz del segmento $\overline{PP_t}$ y la ecuación perpendicular a la recta $3x - 2y - 6 = 0$.

El radio es la distancia del centro a cualquiera de los puntos que están sobre la circunferencia.



- Ecuación de la mediatriz del segmento $\overline{PP_t}$

  Con el punto medio (1, 2) y la pendiente perpendicular – 3, se obtiene:

  $$3x + y - 5 = 0$$

- Ecuación de la recta perpendicular a $3x - 2y - 6 = 0$ en el punto (4, 3)

  Con la pendiente perpendicular $-\frac{2}{3}$ y el punto (4, 3), se obtiene:

  $$2x + 3y - 17 = 0$$

Se resuelve el sistema formado por las rectas $2x + 3y - 17 = 0$ y $3x + y - 5 = 0$ y se obtienen las coordenadas del centro (h, k):

$$C\left(-\frac{2}{7},\frac{41}{7}\right)$$

El radio es la distancia que existe entre el centro y cualquiera de los puntos por los que pasa la circunferencia, por consiguiente se escoge el punto (4, 3):

$$r=\sqrt{\left(4-\left(-\frac{2}{7}\right)\right)^2+\left(3-\frac{41}{7}\right)^2}=\frac{10\sqrt{13}}{7}$$

Con el centro y el radio se encuentra la ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2\;\rightarrow\;\left(x+\frac{2}{7}\right)^2+\left(y-\frac{41}{7}\right)^2=\left(\frac{10\sqrt{13}}{7}\right)^2$$

Al desarrollar y simplificar se obtiene la ecuación en su forma general:

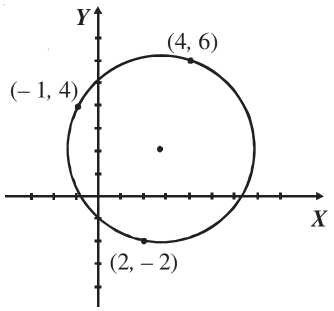
$$7x^2 + 7y^2 + 4x - 82y + 55 = 0$$

6 Encuentra la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos $A(2, -2)$, $B(-1, 4)$ y $C(4, 6)$.

Solución

Existen dos formas de resolver el problema:

1. Sustituir todos los puntos en la ecuación general y resolver el sistema de ecuaciones.
2. Obtener el centro con la intersección de las mediatrices de los segmentos formados por los puntos y posteriormente el radio con la distancia del centro a cualquiera de los tres puntos.



Aplicación de la primera opción:

La ecuación general es $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, entonces si $A = C = 1$, se convierte en $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Sustitución del punto $A(2, -2)$

$$(2)^2 + (-2)^2 + D(2) + E(-2) + F = 0$$
$$4 + 4 + 2D - 2E + F = 0$$

Primera ecuación: $2D - 2E + F = -8$

Sustitución del punto $B(-1, 4)$

$$(-1)^2 + (4)^2 + D(-1) + E(4) + F = 0$$
$$1 + 16 - D + 4E + F = 0$$

Segunda ecuación: $-D + 4E + F = -17$

Sustitución del punto $C(4, 6)$

$$(4)^2 + (6)^2 + D(4) + E(6) + F = 0$$
$$16 + 36 + 4D + 6E + F = 0$$

Tercera ecuación: $4D + 6E + F = -52$

Resulta un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, resolviendo:

$$2D - 2E + F = -8$$
$$-D + 4E + F = -17$$
$$4D + 6E + F = -52$$

Se obtienen los valores de D, E y F,

$$D = -\frac{16}{3}, E = -\frac{25}{6} \text{ y } F = -\frac{17}{3}$$

Estos valores se sustituyen en la ecuación general:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

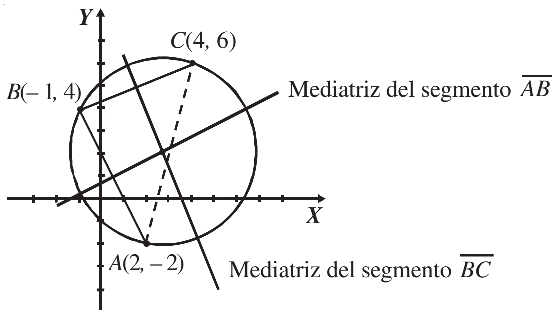
Por tanto, se concluye que la ecuación es:

$$x^2 + y^2 - \frac{16}{3}x - \frac{25}{6}y - \frac{17}{3} = 0$$

Ahora bien, al multiplicar por seis para eliminar los denominadores, se obtiene:

$$6x^2 + 6y^2 - 32x - 25y - 34 = 0$$

Para la segunda opción, se utilizan las mediatrices:



Se obtienen las ecuaciones de las mediatrices de los segmentos:

Mediatriz del segmento $\overline{AB}$.

Coordenadas del punto medio:

$$P_m\left(\frac{2+(-1)}{2}, \frac{-2+4}{2}\right)=P_m\left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

Pendiente del segmento:

$$m=\frac{4-(-2)}{-1-2}=-2$$

Pendiente de la mediatriz:

$$m'=-\frac{1}{m}=-\frac{1}{-2}=\frac{1}{2}$$

Ecuación de la mediatriz:

$$y-1=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right) \rightarrow 2x-4y+3=0$$

Mediatriz del segmento $\overline{BC}$.

Coordenadas del punto medio:

$$P_m\left(\frac{-1+4}{2}, \frac{4+6}{2}\right)=P_m\left(\frac{3}{2}, 5\right)$$

Pendiente del segmento:

$$m=\frac{6-4}{4-(-1)}=\frac{2}{5}$$

Pendiente de la mediatriz:

$$m'=-\frac{1}{m}=-\frac{1}{\frac{2}{5}}=-\frac{5}{2}$$

Ecuación de la mediatriz:

$$y-5=-\frac{5}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right) \rightarrow 10x+4y-35=0$$

Para buscar el centro de la circunferencia se resuelve el sistema de ecuaciones formado con las mediatrices:

$$\begin{cases}2x-4y+3=0\\10x+4y-35=0\end{cases}$$

El punto de intersección de las rectas es $\left(\frac{8}{3},\frac{25}{12}\right)$, representa el centro de la circunferencia. Para obtener el radio, se calcula la distancia del centro al punto $B(-1, 4)$ o a cualquiera de los otros puntos.

$$r=\sqrt{\left(\frac{8}{3}-(-1)\right)^2+\left(\frac{25}{12}-4\right)^2} \rightarrow r=\sqrt{\left(\frac{11}{3}\right)^2+\left(-\frac{23}{12}\right)^2} \rightarrow r=\sqrt{\frac{2\,465}{144}}$$

Se sustituyen el centro $\left(\frac{8}{3},\frac{25}{12}\right)$ y el radio $r=\sqrt{\frac{2\,465}{144}}$ en la ecuación ordinaria de la circunferencia y se transforma a su forma general.

$$\left(x-\frac{8}{3}\right)^2+\left(y-\frac{25}{12}\right)^2=\sqrt{\frac{2\,465}{144}} \rightarrow x^2-\frac{16x}{3}+\frac{64}{9}+y^2-\frac{25y}{6}+\frac{625}{144}-\frac{2\,465}{144}=0$$

$$x^2+y^2-\frac{16x}{3}-\frac{25y}{6}-\frac{17}{3}=0$$

$$6x^2+6y^2-32x-25y-34=0$$

Se observa que por cualquiera de los dos métodos, la ecuación de la circunferencia que pasa por los tres puntos dados o circunscrita en el triángulo es:

$$6x^2+6y^2-32x-25y-34=0$$

EJERCICIO 20

De los siguientes ejercicios, encuentra la ecuación en su forma general:

1. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio de 4 unidades?
2. Determina la ecuación de la circunferencia de centro en el origen y radio de $\frac{\sqrt{3}}{2}$ unidades.
3. Encuentra la ecuación de la circunferencia de centro en el punto $C(1, -3)$ y radio de 2 unidades.
4. Obtén la ecuación de la circunferencia de centro en el punto $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)$ y radio de $\frac{5}{6}$.
5. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia de centro en el origen y que pasa por el punto $(2, -3)$?
6. Encuentra la ecuación de la circunferencia de diámetro el segmento formado por los puntos $A(-4, 7)$ y $B(6, -1)$.
7. Determina la ecuación de la circunferencia de centro en el punto $C(1, -3)$ y que pasa por el punto $(4, 3)$.
8. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia cuyo centro está en $(-1, -5)$ y es tangente al eje Y?
9. El centro de una circunferencia es el punto $(5, -2)$ y pasa por el origen. ¿Cuál es su ecuación?
10. Obtén la ecuación de la circunferencia de centro en el punto $(-4, 2)$ y diámetro 8.
11. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia que es tangente a los ejes coordenados, su radio es de 5 unidades y su centro está en el cuarto cuadrante?
12. Una circunferencia tiene su centro en el eje X y pasa por los puntos $(-1, 5)$ y $(2, 3)$. Determina su ecuación.
13. El centro de una circunferencia está en el eje Y y pasa por $(0, -2)$ y $(3, -6)$. Encuentra su ecuación.
14. Una circunferencia tiene su centro en $(0, -2)$ y es tangente a la recta $5x - 12y + 2 = 0$. ¿Cuál es su ecuación?
15. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia con centro en $(4, -3)$ y que es tangente a la recta $3x + 4y - 10 = 0$?
16. El radio de una circunferencia es 4 y su centro está en las intersecciones de las rectas $x + 3y - 7 = 0$ y $2x + 5y - 12 = 0$. Obtén su ecuación.
17. Determina la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto de intersección de las rectas $2x - 3y - 6 = 0$, $3x + y + 13 = 0$, además, es tangente a la recta $5x + 12y - 106 = 0$.
18. Una circunferencia pasa por el punto $(1, -6)$ y su centro está en la intersección de las rectas $4x - 7y + 10 = 0$ y $7x + 3y - 13 = 0$. Encuentra su ecuación.

Encuentra las ecuaciones de las circunferencias que pasan por los siguientes puntos.

19. $(3, 4)$, $(2, -1)$ y $(0, -3)$
20. $(9, -1)$, $(7, 3)$ y $(4, -8)$
21. $(-2, -2)$, $(-2, 1)$ y $(7, 0)$
22. $(-1, -1)$, $(1, 1)$ y $(5, -3)$
23. Encuentra la ecuación de la circunferencia inscrita en el triángulo, cuyos vértices son los puntos $(-4, 2)$, $\left(\frac{8}{5}, \frac{31}{5}\right)$ y $(16, -13)$.

Para los ejercicios 24 a 27 utiliza el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(3, -2)$, $B(1, 2)$ y $C(-5, -4)$.

24. Encuentra la ecuación de la circunferencia circunscrita en él.
25. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos medios de los lados del triángulo?
26. Determina la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el vértice A y es tangente al lado BC.
27. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia cuyo centro está en la recta $2x + 3y + 1 = 0$ y que pasa por los vértices A y C?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Transformación de la ecuación general a la forma ordinaria

Sea la ecuación de la circunferencia $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, en su forma general y $A = C$, entonces para hallar el centro y el radio se siguen los siguientes pasos:

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$x^2+y^2+\frac{D}{A}x+\frac{E}{A}y+\frac{F}{A}=0$$ Se divide la ecuación entre A.

$$x^2+\frac{D}{A}x+y^2+\frac{E}{A}y=-\frac{F}{A}$$ Se agrupan los términos de x y y, el término independiente se pasa al segundo miembro.

$$x^2+\frac{D}{A}x+\frac{D^2}{4A^2}+y^2+\frac{E}{A}y+\frac{E^2}{4A^2}=\frac{D^2}{4A^2}+\frac{E^2}{4A^2}-\frac{F}{A}$$ Se completa el trinomio cuadrado perfecto.

$$\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2A}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4AF}{4A^2}$$ Se factoriza.

Ahora, al comparar la ecuación con su forma ordinaria se obtiene:

$$Centro=\left(-\frac{D}{2A},\ -\frac{E}{2A}\right) \text{ y } radio=\frac{1}{2A}\sqrt{D^2+E^2-4AF}$$

Lo anterior indica que para transformar la ecuación general a la forma ordinaria se utilizan los siguientes métodos:

- Fórmula
- Completando trinomio cuadrado perfecto

Con los cuales se encuentran las coordenadas del centro y la longitud del radio de una circunferencia.

EJEMPLOS

1 Emplea las fórmulas para obtener el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es:

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 6 = 0$$

Solución

Se determinan los valores de A, D, E y F:

$$A = 1,\ D = 4,\ E = -6 \text{ y } F = 6$$

Éstos se sustituyen en las fórmulas:

$$Centro=\left(-\frac{4}{2(1)},-\frac{(-6)}{2(1)}\right) = (-2,\ 3) \text{ y } radio=\frac{1}{2(1)}\sqrt{(4)^2+(-6)^2-4(1)(6)}=\frac{1}{2}\sqrt{28}=\sqrt{7}$$

Se concluye que el centro es el punto $(-2, 3)$ y el radio $\sqrt{7}$.

2 Para la circunferencia cuya ecuación es:

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$$

Determina completando los trinomios cuadrados perfectos el centro y el radio.

Solución

$x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$

$(x^2 - 6x) + (y^2 + 8y) = 11$ Se agrupan los términos en x y en y, el término independiente se pasa al segundo miembro.

$(x^2 - 6x + (3)^2) + (y^2 + 8y + (4)^2) = 11 + (3)^2 + (4)^2$ Se completan los trinomios cuadrados perfectos.

$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 8y + 16) = 36$

$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 6^2$ Se factoriza para obtener la forma ordinaria.

Resulta que las coordenadas del centro son $C(3, -4)$ y el radio $r = 6$.

3 Encuentra las coordenadas del centro y la longitud del radio de la circunferencia, cuya ecuación es:

$$9x^2 + 9y^2 + 18x - 12y + 10 = 0$$

Solución

$9x^2 + 9y^2 + 18x - 12y + 10 = 0$

$\frac{9x^2}{9}+\frac{9y^2}{9}+\frac{18x}{9}-\frac{12}{9}y+\frac{10}{9}=0$ Se divide entre nueve la ecuación.

$x^2+y^2+2x-\frac{4}{3}y+\frac{10}{9}=0$ Se agrupan los términos de x y y y se pasa al segundo miembro el término independiente.

$x^2+2x+1+y^2-\frac{4}{3}y+\frac{4}{9}=-\frac{10}{9}+1+\frac{4}{9}$ Se completa el trinomio cuadrado perfecto.

$(x+1)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{3}$ Se factoriza y simplifica para obtener la ecuación ordinaria.

Finalmente, las coordenadas del centro son $C\left(-1,\ \frac{2}{3}\right)$ y el radio $r=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

4 ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto (– 4, – 1) y es concéntrica con la circunferencia C_1: $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$?

Nota: Concéntricas: tienen el mismo centro.

Solución

Se obtiene el centro de la circunferencia C_1:

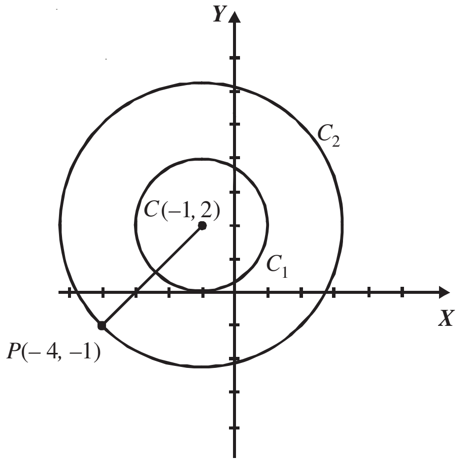
$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0 \rightarrow x^2 + 2x + y^2 - 4y = -1$$
$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = -1 + 1 + 4$$
$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$$

Entonces, el centro es $C(-1, 2)$.

El radio de C_2 se obtiene de la distancia del centro $C(-1,2)$ al $(-4, -1)$.

$$r=\sqrt{(-4-(-1))^2+(-1-2)^2}=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}$$

Gráfica:



Por consiguiente, la ecuación de la circunferencia C_2 es:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \rightarrow (x-(-1))^2 + (y-2)^2 = \left(\sqrt{18}\right)^2$$
$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 18$$
$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 13 = 0$$

La ecuación de la circunferencia C_2 está determinada por:

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 13 = 0$$

5 Obtén la ecuación general de la circunferencia que es tangente a la recta $x + y - 2 = 0$ y concéntrica con la circunferencia $3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 0$.

Solución

Se obtiene el centro de $3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 0$

$$3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 0 \rightarrow \frac{3x^2}{3} + \frac{3y^2}{3} - \frac{6}{3}x - \frac{4}{3}y = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2x - \frac{4}{3}y = 0$$

$$x^2 - 2x + y^2 - \frac{4}{3}y = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - \frac{4}{3}y + \frac{4}{9} = 1 + \frac{4}{9}$$

$$(x-1)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{13}{9}$$

El centro de la circunferencia es $\left(1, \frac{2}{3}\right)$.

El radio es la distancia del punto $\left(1, \frac{2}{3}\right)$ a la recta $x + y - 2 = 0$, entonces,

$$r = \frac{\left|1 + \frac{2}{3} - 2\right|}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2}} = \frac{\left|-\frac{1}{3}\right|}{\sqrt{1+1}} = \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

Por consiguiente, la ecuación general de la circunferencia con centro en $\left(1, \frac{2}{3}\right)$ y radio $\frac{1}{3\sqrt{2}}$ es:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \quad \rightarrow \quad (x-1)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)^2$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - \frac{4}{3}y + \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$$

Al multiplicar por 18,

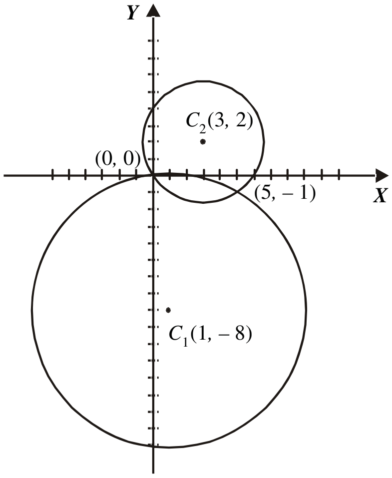
$$18x^2 - 36x + 18 + 18y^2 - 24y + 8 = 1$$

$$18x^2 + 18y^2 - 36x - 24y + 25 = 0$$

6 Determina los puntos de intersección de las circunferencias:

$$C_1: x^2 + y^2 - 2x + 16y = 0 \; ; \; C_2: x^2 + y^2 - 6x - 4y = 0$$

Solución



Se restan las ecuaciones de las circunferencias, para eliminar los términos cuadráticos:

$$\begin{array}{r} x^2 + y^2 - 2x + 16y = 0 \\ -\left(x^2 + y^2 - 6x - 4y = 0\right) \\ \hline 4x + 20y = 0 \end{array}$$

Se despeja x de la última igualdad:

$$x = -\frac{20y}{4} \rightarrow x = -5y$$

Se sustituye el valor de x en cualquiera de las ecuaciones de las circunferencias:

$$(-5y)^2 + y^2 - 2(-5y) + 16y = 0$$

$$25y^2 + y^2 + 10y + 16y = 0$$

$$26y^2 + 26y = 0$$

Esta última ecuación se resuelve y se obtiene:

$$26y^2 + 26y = 0 \rightarrow 26y(y+1) = 0$$

$$y = 0;\ y = -1$$

Los valores obtenidos de y se sustituyen en la igualdad $x = -5y$ para obtener los valores de x:

Para $y = 0$	Para $y = -1$
$x = -5(0)$	$x = -5(-1)$
$x = 0$	$x = 5$

Entonces, los puntos de intersección de las circunferencias son: (0, 0) y (5, – 1).

EJERCICIO 21

Determina el centro y el radio de las siguientes circunferencias:

1. $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 = 0$
2. $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 20 = 0$
3. $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 10 = 0$
4. $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 14 = 0$
5. $x^2 + y^2 + 14x - 8y + 40 = 0$
6. $x^2 + y^2 - 8y + 7 = 0$
7. $x^2 + y^2 + 4x + 3 = 0$
8. $2x^2 + 2y^2 + 10x - 6y + 3 = 0$
9. $4x^2 + 4y^2 - 4x + 12y + 9 = 0$
10. $5x^2 + 5y^2 - 2x - 30y + 42 = 0$
11. $12x^2 + 12y^2 - 18x + 4y + 5 = 0$
12. $36x^2 + 36y^2 + 48x - 36y - 299 = 0$
13. Encuentra la ecuación general de la recta que pasa por el punto (7, 5) y es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 4x + 16y - 22 = 0$.
14. Determina la ecuación general de la circunferencia que pasa por el punto (3, 5) y es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 7x + y - 10 = 0$, en el punto (1, 1).
15. ¿Cuál es la ecuación general de la circunferencia de radio $\sqrt{13}$ y es tangente a la recta $2x + 3y - 7 = 0$, en el punto (2, 1)?
16. Obtén la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos de intersección de las circunferencias $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 16 = 0$ y $x^2 + y^2 + 17x + 3y + 2 = 0$, y cuyo centro está sobre la recta $x + 2y + 5 = 0$.
17. Determina el valor de k para que la recta $kx + y - 15 = 0$ sea tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 6x - 8y - 1 = 0$.
18. ¿Cuáles son los puntos de intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 26 = 0$ con la recta $x - y + 8 = 0$?
19. Encuentra los puntos de intersección de la recta $2x + 3y - 10 = 0$ con la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 28 = 0$.
20. ¿Cuáles son los puntos de intersección de la recta $5x - 7y - 35 = 0$ con la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 36 = 0$?
21. Encuentra los puntos de intersección de las circunferencias:

$$x^2 + y^2 - 12x - 14y + 72 = 0\ ;\ x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0$$

22. Determina los puntos de intersección de las circunferencias:

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y + 15 = 0\ ;\ x^2 + y^2 - 16x - 2y + 45 = 0$$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Familia o haz de circunferencias

Son aquellas circunferencias que satisfacen la condición:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=p^2$$

Donde p es el parámetro y es un número positivo.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Representa gráficamente la familia de circunferencias con centro en el punto (2, – 3) y p = 1, 2 y 3.

Solución

Se trata de una familia de circunferencias concéntricas.

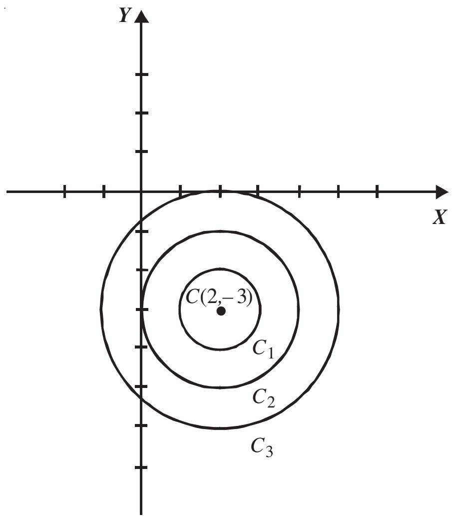
Las ecuaciones de las circunferencias son:

C_1: $(x-2)^2+(y+3)^2=1$ o $x^2+y^2-4x+6y+12=0$

C_2: $(x-2)^2+(y+3)^2=4$ o $x^2+y^2-4x+6y+9=0$

C_3: $(x-2)^2+(y+3)^2=9$ o $x^2+y^2-4x+6y+4=0$

Sus representaciones gráficas son:



EJERCICIO 22

Representa gráficamente las siguientes familias de circunferencias:

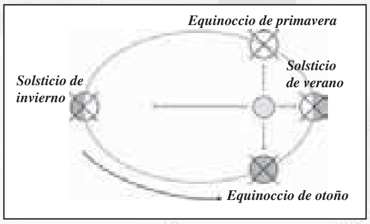
1. Centro en el punto (1, 2) y p = 1, 2 y 3
2. Centro en el punto (– 2, – 3) y p = 1, 3 y 5
3. Centro en el origen y p = 2, 4 y 6
4. $(x-1)^2+(y-3)^2=p^2$
5. $x^2+(y-2)^2=p^2$
6. $x^2+y^2=p^2$
7. Centro en el punto (– 3, 4) y $p = 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$
8. $(x+2)^2+(y-3)^2=p^2$
9. $(x-3)^2+y^2=p^2$
10. Centro en el punto (0, – 2) y p = 2, 4 y 6

Determina la familia de circunferencias que cumplen las siguientes condiciones:

11. Centro en la intersección de las rectas $2x+3y-5=0$, $x-4y+3=0$
12. Centro en el punto medio del segmento, cuyos extremos son (3, – 2) y (– 5, – 4)
13. Concéntricas con $x^2+y^2+4x-6y-12=0$
14. Concéntricas con la circunferencia que pasa por los puntos (0, 0), (1, 1), (1, – 1)

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

El eje TERRESTRE



Movimiento de traslación de la Tierra

El eje terrestre es una línea imaginaria que atraviesa la Tierra y pasa por su centro.

La traslación, sumada a la inclinación del eje terrestre, hace que la Tierra ocupe distintas posiciones respecto al Sol durante el año que demora en completar su órbita. Esto origina la sucesión de las distintas estaciones (verano, otoño, invierno y primavera).

Debido a la inclinación de la Tierra, siempre hay una mitad que está más cerca del Sol. Esto provoca diferencias en las temperaturas y en la duración del día y la noche durante el año. Cada variación brusca de estos factores marca el inicio de una de las cuatro estaciones.

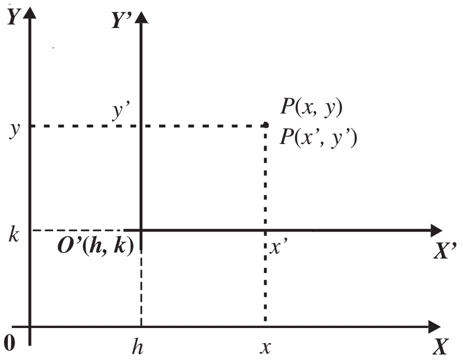
Cuando es el polo norte el que se inclina hacia el Sol (de marzo a septiembre), los rayos solares llegan con intensidad al hemisferio norte, lo que determina la sucesión de la primavera y el verano, mientras que en el hemisferio sur se suceden el otoño y el invierno, el polo sur está en oscuridad. La situación se invierte cuando es el hemisferio sur el que se inclina hacia el Sol, de septiembre a marzo. En el verano los días (horas de sol) son prolongados, por el contrario, en el invierno, son mucho más cortos, ya que el Sol sale tarde y se pone temprano.

Traslación de ejes

Desplazamiento de los ejes de un sistema de coordenadas rectangulares, de tal manera que el nuevo origen sea el punto $O'(h, k)$. La traslación se utiliza para eliminar los términos lineales de la ecuación de segundo grado de la forma:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Fórmulas que relacionan el sistema de coordenadas $X'Y'$ con el sistema XY.



Ecuaciones de traslación:

$$\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases}$$

Traslación de un punto a un nuevo sistema de coordenadas

Ejemplo

Si el origen se traslada al punto (1, 1), ¿cuáles son las coordenadas del punto (– 3, 6)?

Solución

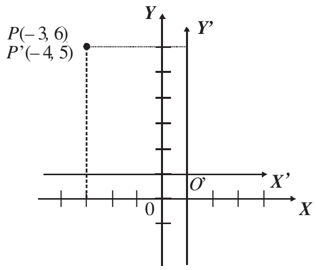
Se calculan los valores de x, y, h y k:

$$x = -3,\ y = 6,\ h = 1 \text{ y } k = 1$$

Los valores se sustituyen en las ecuaciones de traslación, para encontrar el valor de x' y y':

$$x = x' + h$$
$$y = y' + k$$

$$-3 = x' + 1 \qquad 6 = y' + 1$$
$$-3 - 1 = x' \qquad 6 - 1 = y'$$
$$x' = -4 \qquad y' = 5$$



Por tanto, las coordenadas del punto en el nuevo sistema son:

$$(-4, 5)$$

Transformación de una curva trasladando el origen

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Transforma la ecuación $x^2 + y^2 - 4x + 4y = 0$, trasladando el origen al punto $C(2, -2)$.

Solución

El nuevo origen es el punto $C(h, k) = C(2, -2)$, entonces $h = 2$ y $k = -2$.

Se sustituyen los valores en las ecuaciones de traslación:

$$x = x' + h = x' + 2 \qquad y = y' + k = y' - 2$$

Éstas se sustituyen en la ecuación de la circunferencia:

$$(x' + 2)^2 + (y' - 2)^2 - 4(x' + 2) + 4(y' - 2) = 0$$

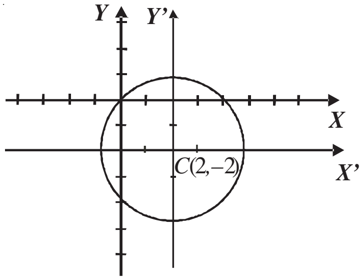
Se desarrollan las operaciones indicadas y se simplifica para obtener:

$$x'^2 + 4x' + 4 + y'^2 - 4y' + 4 - 4x' - 8 + 4y' - 8 = 0$$
$$x'^2 + y'^2 + 4x' - 4x' - 4y' + 4y' + 4 + 4 - 8 - 8 = 0$$
$$x'^2 + y'^2 - 8 = 0$$

Finalmente, la ecuación que resulta es:

$$x'^2 + y'^2 - 8 = 0$$

Gráfica



2 Encuentra la nueva ecuación de la curva $2x^2 + 3y^2 - 8x + 6y - 7 = 0$, si se traslada el origen al punto $(2, -1)$.

Solución

Al sustituir $h = 2$ y $k = -1$ en las ecuaciones de traslación $x = x' + h$; $y = y' + k$, se determina que:

$$x = x' + 2, \; y = y' - 1$$

Los valores de x y y se sustituyen en la ecuación $2x^2 + 3y^2 - 8x + 6y = 7$, se desarrollan los binomios y se reducen términos semejantes para obtener la nueva ecuación.

$$2(x' + 2)^2 + 3(y' - 1)^2 - 8(x' + 2) + 6(y' - 1) = 7$$
$$2(x'^2 + 4x' + 4) + 3(y'^2 - 2y' + 1) - 8x' - 16 + 6y' - 6 = 7$$
$$2x'^2 + 8x' + 8 + 3y'^2 - 6y' + 3 - 8x' - 16 + 6y' - 6 = 7$$
$$2x'^2 + 3y'^2 - 18 = 0$$

3 Determina la nueva ecuación de la curva $y^2 = x^3 + 3x^2 + 3x + 4y - 3$, si el origen se mueve al punto $(-1, 2)$.

Solución

Se sustituyen los valores de h y k en las ecuaciones de traslación.

$$x = x' - 1$$

$$y = y' + 2$$

Las ecuaciones se sustituyen en la ecuación de la curva y se desarrollan las operaciones indicadas.

$$y^2 = x^3 + 3x^2 + 3x + 4y - 3$$

$$(y' + 2)^2 = (x' - 1)^3 + 3(x' - 1)^2 + 3(x' - 1) + 4(y' + 2) - 3$$

$$y'^2 + 4y' + 4 = x'^3 - 3x'^2 + 3x' - 1 + 3(x'^2 - 2x' + 1) + 3(x' - 1) + 4(y' + 2) - 3$$

$$y'^2 = x'^3 - 3x'^2 + 3x' - 1 + 3x'^2 - 6x' + 3 + 3x' - 3 + 4y' + 8 - 3 - 4y' - 4$$

Se simplifican términos semejantes para obtener la nueva ecuación.

$$y'^2 = x'^3$$

EJERCICIO 23

Determina las nuevas coordenadas de los siguientes puntos, de tal manera que se trasladen los ejes coordenados al nuevo origen indicado.

1. $A(4, -1)$; $O'(2, -3)$
2. $B(5, 2)$; $O'(-4, 1)$
3. $C(0, 5)$; $O'(1, 1)$
4. $D(-6, -4)$; $O'(4, 0)$
5. $E(0, 0)$; $O'(8, -7)$

Transforma las siguientes ecuaciones, trasladando los ejes coordenados al nuevo origen indicado.

6. $y^2 - 8x - 6y - 7 = 0$; $(-2, 3)$
7. $x^2 + 2x - 4y + 5 = 0$; $(-1, 1)$
8. $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$; $(2, 0)$
9. $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 9 = 0$; $(-3, 5)$
10. $4y^2 - 48x - 4y + 49 = 0$; $\left(1, \frac{1}{2}\right)$
11. $9x^2 + 16y^2 - 32y - 128 = 0$; $(0, 1)$
12. $4x^2 + 5y^2 - 32x + 10y + 49 = 0$; $(4, -1)$
13. $9x^2 + 4y^2 - 36x - 24y = 0$; $(2, 3)$
14. $x^2 - 2y^2 - 2x + 12y - 19 = 0$; $(1, 3)$
15. $4x^2 - 9y^2 - 24x + 108y - 324 = 0$; $(3, 6)$
16. $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 11$; $(2, -3)$
17. $y^2 = x^3 + 3x^2 + 3x - 2y - 1$; $(-1, -1)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Transformación de una ecuación

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el nuevo origen para que la ecuación de la curva $y^2 + 4x - 10y + 25 = 0$, al realizar una transformación, no tenga términos lineales.

Solución

Se sustituyen las ecuaciones de traslación $x = x' + h$, $y = y' + k$, en la ecuación dada.

$$y^2 + 4x - 10y + 25 = 0$$

$$(y' + k)^2 + 4(x' + h) - 10(y' + k) + 25 = 0$$

Se desarrollan las operaciones indicadas.

$$y'^2 + 2ky' + k^2 + 4x' + 4h - 10\,y' - 10k + 25 = 0$$

Se agrupan los términos x' y y' y se factorizan por término común.

$$y'^2 + 2ky' - 10y' + 4x' + k^2 + 4h - 10k + 25 = 0$$

$$y'^2 + (2k - 10)y' + 4x' + (k^2 + 4h - 10k + 25) = 0$$

Para que la ecuación no tenga términos lineales se igualan con cero los coeficientes de éstos, para determinar el valor de las incógnitas.

$$2k - 10 = 0$$

$$2k = 10$$

$$k = 5$$

El coeficiente del término lineal x' es distinto de cero, entonces se igualan con cero los términos independientes, se sustituye el valor encontrado y se resuelve la ecuación.

$$k^2 + 4h - 10k + 25 = 0$$

$$(5)^2 + 4h - 10(5) + 25 = 0$$

$$25 + 4h - 50 + 25 = 0$$

$$4h = 0$$

$$h = 0$$

Finalmente, el nuevo origen es el punto $O'(0, 5)$ y la ecuación transformada es:

$$y'^2 + 4x' = 0$$

2 Elimina los términos lineales mediante una traslación de ejes y determina el nuevo origen de la ecuación:

$$x^2 + 9y^2 + 4x - 18y - 23 = 0$$

Solución

Al sustituir las ecuaciones de traslación $x = x' + h$, $y = y' + k$ en la ecuación dada.

$$(x' + h)^2 + 9(y' + k)^2 + 4(x' + h) - 18(y' + k) - 23 = 0$$

Se desarrollan las operaciones indicadas.

$$x'^2 + 2x'h + h^2 + 9(y'^2 + 2y'k + k^2) + 4x' + 4h - 18y' - 18k - 23 = 0$$

$$x'^2 + 2x'h + h^2 + 9y'^2 + 18y'k + 9k^2 + 4x' + 4h - 18y' - 18k - 23 = 0$$

Se agrupan los términos lineales y se factoriza a x' y y' como término común.

$$x'^2 + 9y'^2 + (2h + 4)x' + (18k - 18)y' + h^2 + 9k^2 + 4h - 18k - 23 = 0$$

Para eliminar los términos lineales x' y y', los coeficientes se igualan con cero y se resuelven las ecuaciones que resultan.

$$2h + 4 = 0 \qquad 18k - 18 = 0$$

$$2h = -4 \qquad 18k = 18$$

$$h = -2 \qquad k = 1$$

Entonces, el nuevo origen tiene coordenadas $(-2, 1)$.

Los valores de h y k se sustituyen en la ecuación:

$$x'^2 + 9y'^2 + (2h + 4)x' + (18k - 18)y' + h^2 + 9k^2 + 4h - 18k - 23 = 0$$

Se obtiene la ecuación referida al nuevo origen.

$$x'^2 + 9y'^2 + (2h + 4)x' + (18k - 18)y' + h^2 + 9k^2 + 4h - 18k - 23 = 0$$

$$x'^2 + 9y'^2 + \left[2(-2)+4\right]x' + \left[18(1)-18\right]y' + \left[(-2)^2+9(1)^2+4(-2)-18(1)-23\right] = 0$$

$$x'^2 + 9y'^2 + (-4 + 4)x' + (18 - 18)y' + (4 + 9 - 8 - 18 - 23) = 0$$

$$x'^2 + 9y'^2 - 36 = 0$$

Por tanto, el nuevo origen y la ecuación sin términos lineales son:

$$O'(-2, 1);\ x'^2 + 9y'^2 - 36 = 0$$

3 Transforma la ecuación $3x^2 - 4y^2 + 6x + 24y - 135 = 0$ en otra que no tenga términos de primer grado.

Solución

Al sustituir $x = x' + h$, $y = y' + k$ en la ecuación:

$$3x^2 - 4y^2 + 6x + 24y - 135 = 0$$

$$3(x' + h)^2 - 4(y' + k)^2 + 6(x' + h) + 24(y' + k) - 135 = 0$$

$$3(x'^2 + 2x'h + h^2) - 4(y'^2 + 2y'k + k^2) + 6x' + 6h + 24y' + 24k - 135 = 0$$

$$3x'^2 + 6x'h + 3h^2 - 4y'^2 - 8y'k - 4k^2 + 6x' + 6h + 24y' + 24k - 135 = 0$$

$$3x'^2 - 4y'^2 + (6h + 6)x' + (-8k + 24)y' + 3h^2 - 4k^2 + 6h + 24k - 135 = 0$$

Donde:

$$6h + 6 = 0 \qquad -8k + 24 = 0$$
$$6h = -6 \qquad -8k = -24$$
$$h = -1 \qquad k = 3$$

Por consiguiente, las coordenadas del nuevo origen son (– 1, 3).

Se sustituyen estos valores en la ecuación:

$$3x'^2 - 4y'^2 + (6h + 6)x' + (-8k + 24)y' + 3h^2 - 4k^2 + 6h + 24k - 135 = 0$$

se obtiene:

$$3x'^2 - 4y'^2 + (6(-1) + 6)x' + (-8(3) + 24)y' + 3(-1)^2 - 4(3)^2 + 6(-1) + 24(3) - 135 = 0$$
$$3x'^2 - 4y'^2 + (-6 + 6)x' + (-24 + 24)y' + 3(1) - 4(9) - 6 + 72 - 135 = 0$$
$$3x'^2 - 4y'^2 + 3 - 36 - 6 + 72 - 135 = 0$$
$$3x'^2 - 4y'^2 - 102 = 0$$

4 Transforma la ecuación $x^3 + 3x^2 + 3x + y = 0$, mediante una traslación de ejes de coordenadas o una que no tenga términos lineales.

Solución

Sustituir $x = x' + h$, $y = y' + k$ en la ecuación:

$$x^3 + 3x^2 + 3x + y = 0$$
$$(x' + h)^3 + 3(x' + h)^2 + 3(x' + h) + (y' + k) = 0$$

Se desarrollan las operaciones, se agrupan los términos lineales y se factorizan como término común.

$$x'^3 + 3hx'^2 + 3h^2x' + h^3 + 3x'^2 + 6hx' + 3h^2 + 3x' + 3h + y' + k = 0$$
$$x'^3 + 3hx'^2 + 3x'^2 + 3h^2x' + 6hx' + 3x' + y' + h^3 + 3h^2 + 3h + k = 0$$
$$x'^3 + (3h + 3)x'^2 + (3h^2 + 6h + 3)x' + y' + (h^3 + 3h^2 + 3h + k) = 0$$

Se iguala con cero el término de primer grado y se resuelve la ecuación.

$$3h^2 + 6h + 3 = 0$$
$$h^2 + 2h + 1 = 0$$
$$(h + 1)^2 = 0$$
$$h = -1$$

El coeficiente de y' es distinto de cero, se igualan con cero los términos independientes y se sustituye el valor encontrado de h y se resuelve la ecuación.

$$h^3 + 3h^2 + 3h + k = 0$$
$$(-1)^3 + 3(-1)^2 + 3(-1) + k = 0$$
$$k = 1$$

Por tanto, las coordenadas del nuevo origen son: (– 1, 1).

Los valores de h y k se sustituyen en la ecuación.

$$x'^3 + (3h + 3)x'^2 + (3h^2 + 6h + 3)x' + y' + (h^3 + 3h^2 + 3h + k) = 0$$

Finalmente, la ecuación transformada es:

$$x'^3 + y' = 0$$

EJERCICIO 24

Mediante una traslación de ejes reduce las siguientes ecuaciones a otras que carezcan de los términos lineales.

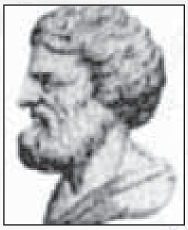
1. $x^2 - 4x - 8y + 12 = 0$
2. $y^2 - 16x + 80 = 0$
3. $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 5 = 0$
4. $x^2 + y^2 + 2x + 8y + 13 = 0$
5. $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$
6. $16x^2 + 16y^2 + 64x - 160y + 455 = 0$
7. $25x^2 - 16y^2 + 96y + 256 = 0$
8. $y^3 + 3y^2 - x + 3y - 3 = 0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 8

PARÁBOLA

Reseña HISTÓRICA

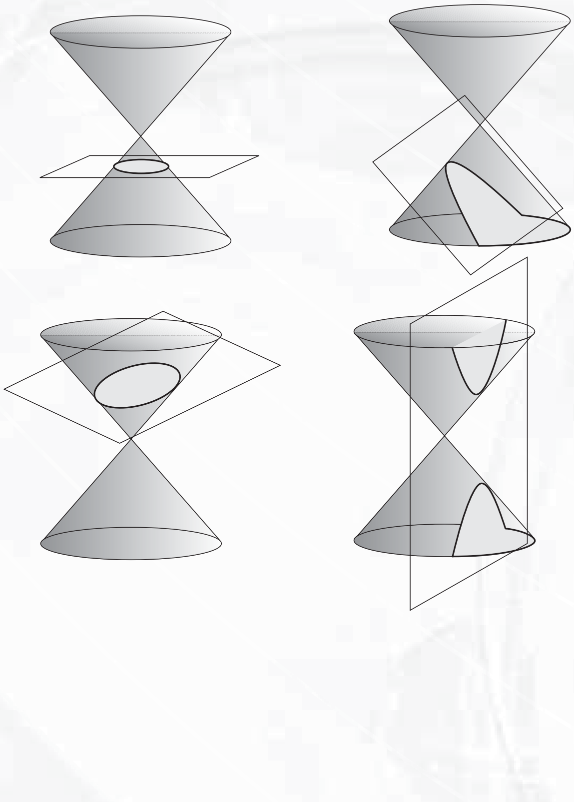


Apolonio de Perga
(262 *a. C.*–190 *a. C.*)

Conocido como "el gran geómetra". Se sabe poco de su vida, pero sus trabajos tuvieron una gran influencia en el desarrollo de las matemáticas, en particular su famoso libro *Las cónicas*, introdujo términos tan familiares hoy en día como parábola, elipse e hipérbola.

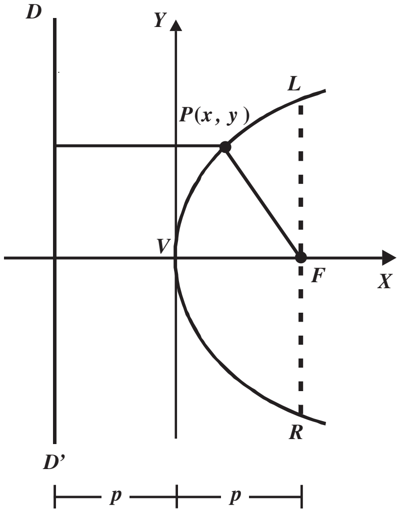
Apolonio demostró que las curvas cónicas tienen muchas propiedades interesantes. Algunas de esas propiedades son las que se utilizan actualmente para definirlas. Quizá las propiedades más interesantes y útiles que descubrió de las cónicas son las propiedades de reflexión. Si se construyen espejos con la forma de una curva cónica que gira alrededor de su eje, se obtienen espejos elípticos, parabólicos o hiperbólicos, según la curva que gira.

La circunferencia, parábola, elipse e hipérbola son llamadas cónicas porque se pueden obtener haciendo cortes en un cono circular recto doble con un plano.



Definición

Es el lugar geométrico que describe un punto que se mueve en el plano de tal manera que equidistan de un punto fijo, llamado foco, y una recta fija, llamada directriz.



$\overline{PF} = \overline{PD}$

Elementos:

V: Vértice

F: Foco

$\overline{DD'}$: Directriz

LR: Lado recto, $LR = |4p|$

p: parámetro
(distancia del vértice al foco o a la directriz)

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan del punto $F(0, 3)$ y de la recta $y + 3 = 0$.

Solución

Con las fórmulas de distancia entre dos puntos $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ y distancia de un punto a una recta $d = \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, se obtienen las distancias del punto $P(x, y)$ a F y a la recta:

$$\overline{PF} = \sqrt{x^2 + (y-3)^2},\ \overline{PD} = \frac{y+3}{\sqrt{0^2 + 1^2}}$$

Al igualar:

$$\sqrt{x^2 + (y-3)^2} = y + 3$$

Se elevan al cuadrado ambos miembros de la ecuación:

$$\left(\sqrt{x^2 + (y-3)^2}\right)^2 = (y+3)^2$$

Se desarrolla y se simplifica para obtener la ecuación del lugar geométrico, denominada parábola.

$$x^2 + y^2 - 6y + 9 = y^2 + 6y + 9$$

$$x^2 - 12y = 0$$

2 Determina la ecuación del lugar geométrico de un punto del plano que se mueve de tal forma que su distancia al punto (2, 1) siempre es igual a su distancia a la recta $x + 2y - 3 = 0$.

Solución

Se obtienen las distancias,

$$\overline{PF} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}\ ,\ \overline{PD} = \frac{x+2y-3}{\sqrt{1^2+2^2}}$$

Al igualar,

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = \frac{x+2y-3}{\sqrt{5}}$$

Al elevar al cuadrado ambos miembros y reducir términos semejantes, resulta la ecuación que se busca,

$$\left(\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}\right)^2 = \left(\frac{x+2y-3}{\sqrt{5}}\right)^2$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = \frac{x^2 + 4y^2 + 9 + 4xy - 6x - 12y}{5}$$

$$5x^2 + 5y^2 - 20x - 10y + 25 = x^2 + 4y^2 + 9 + 4xy - 6x - 12y$$

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 14x + 2y + 16 = 0$$

EJERCICIO **25**

1. Un punto del plano se mueve de tal forma que su distancia al punto (– 2, 0) es igual a su distancia a la recta $x - 2 = 0$. Determina la ecuación del lugar geométrico descrito por el punto.
2. Un punto se mueve en el plano de tal manera que equidista del punto (0, – 1) y de la recta $y - 1 = 0$. Encuentra la ecuación del lugar geométrico que describe.
3. Un punto $P(x, y)$ se mueve de manera que su distancia al punto (3, – 1) es siempre igual a su distancia a la recta $x + 3 = 0$. Determina la ecuación del lugar geométrico.
4. Encuentra la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de la recta $y + 4 = 0$ y del punto (0, 4).
5. Obtén la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que se encuentran a la misma distancia del punto (2, 4) y de la recta $y - 6 = 0$.
6. Encuentra la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano, de los cuales su distancia a la recta $x + 1 = 0$ es igual a su distancia al punto (– 7, 2).
7. Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan del punto (0, 3) y de la recta $x + y - 4 = 0$.
8. Un punto del plano se mueve de tal forma que su distancia al punto (2, – 1) es igual a su distancia a la recta $2x + 3y - 1 = 0$. Obtén la ecuación del lugar geométrico que describe el punto.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Ecuación de la parábola con vértice en el origen

Sea una parábola con vértice en el origen, foco $F(p, 0)$ donde p es el parámetro y su directriz $x = -p$. Se toma un punto $P(x, y)$ que cumpla con la condición de que la distancia al foco y a la directriz sea la misma, es decir:

$$\overline{PF} = \overline{PD}$$

Al aplicar la fórmula de distancia entre dos puntos, $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, y la de distancia de un punto a una recta $d = \dfrac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, se obtienen las distancias del punto P al foco y a la directriz.

La distancia de P al foco es:

$$\overline{PF} = \sqrt{(x - p)^2 + y^2}$$

La distancia de P a la recta $x + p = 0$ es:

$$\overline{PF} = \frac{1(x) + 0(y) + p}{\sqrt{(1)^2 + (0)^2}} = x + p$$

Ahora se igualan las distancias:

$$\sqrt{(x - p)^2 + y^2} = x + p$$

Al elevar al cuadrado cada miembro y simplificar se determina que:

$$\left(\sqrt{(x - p)^2 + y^2}\right)^2 = (x + p)^2$$

$$(x - p)^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$$

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 - x^2 - 2px - p^2 = 0$$

$$y^2 - 4px = 0$$

Si el foco está sobre el eje Y, $F(0, p)$ donde p es el parámetro y su directriz la recta $y = -p$ y vértice en el origen, al aplicar la definición el resultado es el siguiente:

$$\sqrt{(y - p)^2 + x^2} = y + p$$

Al elevar al cuadrado cada miembro y simplificar se obtiene:

$$\left(\sqrt{(y - p)^2 + x^2}\right)^2 = (y + p)^2$$

$$(y - p)^2 + x^2 = y^2 + 2py + p^2$$

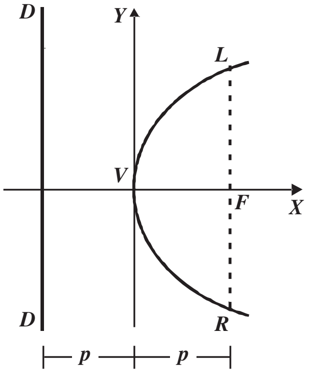
$$y^2 - 2py + p^2 + x^2 - y^2 - 2py - p^2 = 0$$

$$x^2 - 4py = 0$$

Elementos y ecuación de una parábola con vértice en el origen

Parábola horizontal

Su foco está sobre el eje X y son cóncavas hacia la derecha o a la izquierda.



Ecuación canónica:

$$y^2 = 4px$$

Foco: $F(p, 0)$

Directriz $\left(\overline{DD'}\right)$: $x = -p$

Ecuación del eje: $y = 0$

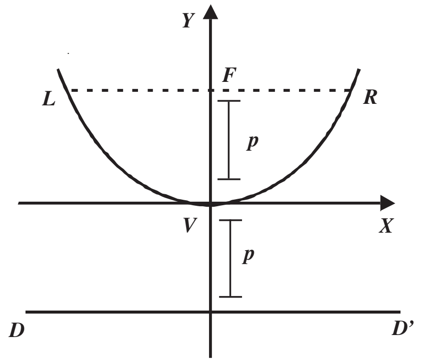
Lado recto: $\overline{LR} = |4p|$

Cancavidad

- Si $p > 0$ entonces la parábola abre hacia la derecha.
- Si $p < 0$ entonces la parábola abre hacia la izquierda.

Parábola vertical

Su foco está sobre el eje Y, son cóncavas hacia arriba o hacia abajo.



Ecuación canónica:

$x^2 = 4py$

Foco: $F(0, p)$

Directriz $\left(\overline{DD'}\right)$: $y = -p$

Ecuación del eje: $x = 0$

Lado recto: $\overline{LR} = |4p|$

Concavidad

- Si $p > 0$ entonces la parábola es cóncava hacia arriba.
- Si $p < 0$ entonces la parábola es cóncava hacia abajo.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra los elementos y grafica la parábola cuya ecuación es $y^2 - 8x = 0$.

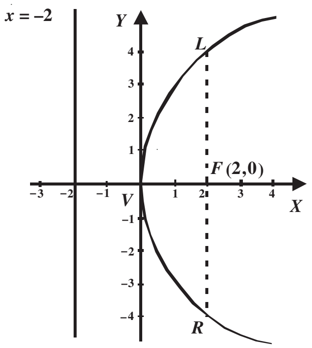
Solución

Se escribe la ecuación en su forma canónica: $y^2 = 4px$

$$y^2 - 8x = 0 \qquad \rightarrow \qquad y^2 = 8x$$

Donde $4p = 8 \quad \rightarrow \quad p = 2$

Es una parábola horizontal y abre hacia la derecha, al sustituir en las fórmulas se obtienen sus elementos y posteriormente su gráfica.



Foco: $F(p, 0) = F(2, 0)$

Directriz: $x = -p \rightarrow x = -2$

Lado recto: $LR = |4(2)| = 8$

Eje: $y = 0$

2 Encuentra los elementos y grafica la parábola cuya ecuación es: $3x^2 - 12y = 0$.

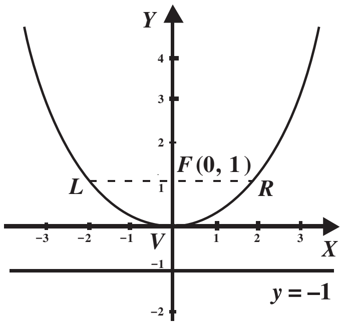
Solución

Se escribe la ecuación en su forma canónica: $x^2 = 4py$

$$3x^2 - 12y = 0 \quad \rightarrow \quad 3x^2 = 12y \quad \rightarrow \quad x^2 = 4y$$

Donde $4p = 4$, entonces $p = 1$.

Es una parábola vertical y abre hacia arriba, al sustituir en las fórmulas se determinan los elementos y posteriormente la gráfica:



Foco: $F(0, p) = F(0, 1)$

Directriz: $y = -p \rightarrow y = -1$

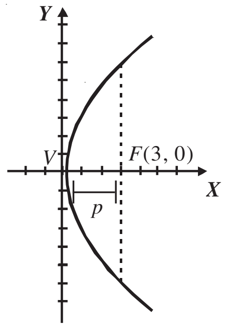
Lado recto: $LR = |4(1)| = 4$

Eje: $x = 0$

3 Determina la ecuación de la parábola con vértice en el origen y foco en el punto (3, 0).

Solución

Se grafican los elementos dados, se deduce que la parábola es cóncava hacia la derecha y el valor del parámetro es $p = 3$, al sustituir en la ecuación $y^2 = 4px$, se obtiene:



$y^2 = 4px$

$y^2 = 4(3)x$

$y^2 = 12x$

$y^2 - 12x = 0$

Otra forma de resolver este problema es igualar el foco de la parábola horizontal con la coordenada del foco dado:

$$F(p, 0) = F(3, 0), \text{ por tanto, } p = 3$$

Al sustituir el valor de $p = 3$ en la ecuación $y^2 = 4px$, se determina que:

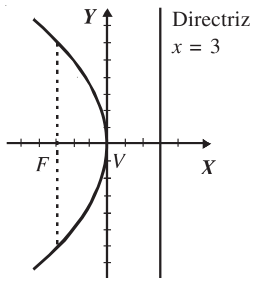
$$y^2 = 12x$$

Por consiguiente, la ecuación de la parábola es: $y^2 - 12x = 0$.

4 Obtén la ecuación de la parábola con vértice en el origen y directriz en la recta $x - 3 = 0$.

Solución

Al graficar la directriz $x = 3$ y localizar el vértice se deduce que la parábola es horizontal y abre hacia la izquierda, por tanto, $p = -3$, al sustituir en la fórmula $y^2 = 4px$, la ecuación resultante es:



$$y^2 = 4px$$
$$y^2 = 4(-3)x$$
$$y^2 = -12x$$
$$y^2 + 12x = 0$$

Finalmente, la ecuación de la parábola es: $y^2 + 12x = 0$.

5 Una parábola de vértice en el origen pasa por el punto (2, 3) y su eje coincide con el eje Y. Determina su ecuación.

Solución

El eje coincide con el eje Y, entonces la parábola es vertical. Si pasa por el punto (2, 3), dicho punto cumple con la ecuación $x^2 = 4py$; por tanto, se sustituye para despejar p.

$$x^2 = 4py \quad \rightarrow \quad (2)^2 = 4p(3)$$
$$4 = 12p$$
$$p = \frac{1}{3}$$

Al conocer el parámetro se determina la ecuación:

$$x^2 = 4py \quad \rightarrow \quad x^2 = 4\left(\frac{1}{3}\right)y$$
$$x^2 = \frac{4}{3}y$$
$$3x^2 - 4y = 0$$

Por consiguiente, la ecuación de la parábola es: $3x^2 - 4y = 0$.

6 Calcula la longitud de la cuerda determinada por la parábola $x^2 + 8y = 0$ y la recta de ecuación $x - 2y - 8 = 0$.

Solución

La cuerda es un segmento de la recta dada, se encuentran los puntos de intersección con la parábola al despejar x o y de la ecuación de la recta y sustituir en la cuadrática.

Se despeja y de $x - 2y - 8 = 0 \rightarrow y = \frac{8-x}{-2}$

Se sustituye en $x^2 + 8y = 0$, se simplifica y se resuelve la ecuación:

$$x^2 + 8\left(\frac{8-x}{-2}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 4(8 - x) = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 + 4x - 32 = 0$$

Al factorizar:

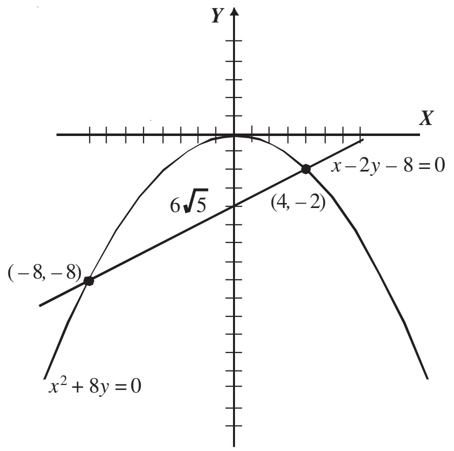
$$(x + 8)(x - 4) = 0$$
$$x + 8 = 0; \qquad x - 4 = 0$$
$$x = -8 \qquad x = 4$$

Al sustituir estos valores en $y = \frac{8-x}{-2}$, se obtiene:

$$\text{Si } x = -8,\ y = \frac{8-(-8)}{-2} = \frac{16}{-2} = -8 \qquad \text{Si } x = 4,\ y = \frac{8-(4)}{-2} = \frac{4}{-2} = -2$$

Los puntos de intersección son: (– 8, – 8) y (4, – 2).

Gráfica:



Se determina la distancia entre los puntos obtenidos:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(4-(-8))^2 + (-2-(-8))^2}$$

$$d = \sqrt{144 + 36}$$

$$d = \sqrt{180}$$

$$d = 6\sqrt{5}$$

Por tanto, la longitud de la cuerda es $6\sqrt{5}$ unidades.

EJERCICIO 26

Grafica y determina las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz, la longitud del lado recto y la ecuación del eje de cada una de las siguientes parábolas:

1. $y^2 = -4x$
2. $x^2 = 12y$
3. $y^2 - 20x = 0$
4. $x^2 = 16y$
5. $3y^2 + 48x = 0$
6. $2x^2 + 16y = 0$
7. $x^2 + 6y = 0$
8. $2y^2 - 16x = 0$
9. $24y = 8x^2$
10. $3x^2 + 8y = 0$
11. $y^2 = 5x$
12. $x = -y^2$
13. $y = x^2$

Encuentra las ecuaciones de las parábolas con los datos dados:

14. Vértice en el origen y foco en el punto $(-5, 0)$
15. Vértice en el origen y foco en el punto $(0, 6)$
16. Vértice en el origen y foco en el punto $(2, 0)$
17. Vértice en el origen y foco en el punto $(0, -1)$
18. Vértice en el origen y foco en el punto $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$
19. Vértice en el origen y foco en el punto $\left(0, -\frac{7}{3}\right)$
20. Vértice en el origen y directriz en la recta $y + 2 = 0$
21. Vértice en el origen y directriz en la recta $x - 6 = 0$
22. Vértice en el origen y directriz en la recta $2y - 5 = 0$
23. Vértice en el origen y directriz en la recta $2x - 3 = 0$
24. Foco en el punto $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$ y directriz en la recta $3x + 4 = 0$
25. Foco en el punto $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ y directriz en la recta $4y + 1 = 0$
26. Vértice en el origen, su eje coincide con el eje X y pasa por el punto $(-2, 6)$
27. Vértice en el origen, pasa por el punto $(-2, -1)$ y su eje coincide con el eje Y
28. Vértice en el origen, foco sobre el eje X y pasa por el punto $(3, 4)$
29. Vértice en el origen, foco sobre el eje Y y pasa por el punto $\left(-2, -\frac{3}{4}\right)$

Resuelve los siguientes problemas:

30. Calcula la longitud de la cuerda de la parábola $x^2 - 12y = 0$, la cual es un segmento de la recta $3x - 2y - 12 = 0$
31. Obtén la longitud de la cuerda de la parábola $x - y^2 = 0$, la cual es un segmento de la recta $x - y - 6 = 0$
32. Una parábola tiene su vértice en el origen e interseca a la recta $x + 4y - 9 = 0$, en el punto donde su abscisa es la mitad de su ordenada. Encuentra la ecuación de la parábola (dos soluciones).
33. Determina la ecuación de la parábola con eje horizontal y vértice en el origen, que pase por los puntos de intersección de la curva $x^2 + y^2 - 18 = 0$, y la recta $x - y = 0$ (dos soluciones).
34. Obtén la ecuación de la parábola de vértice en el origen y cuyo lado recto es el diámetro vertical de la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x - 27 = 0$
35. Determina la ecuación de la parábola de vértice en el origen y que tiene como lado recto el diámetro horizontal de la circunferencia: $x^2 + y^2 - 4y - 12 = 0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Ecuación de la parábola con vértice en el punto (*h*, *k*)

Sea una parábola con vértice fuera del origen en (h, k), coordenadas del foco $F(h + p, k)$ donde p es el parámetro y su directriz $x = h - p$. Toma un punto $P(x, y)$ que cumpla con la condición de que la distancia al foco y a la directriz sea la misma, es decir:

$$\overline{PF} = \overline{PD}$$

Al aplicar la fórmula de distancia entre dos puntos, $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, y la de distancia de un punto a una recta $d = \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, se obtienen las distancias del punto P al foco y a la directriz.

La distancia de P al foco es:

$$\overline{PF} = \sqrt{(x - (h + p))^2 + (y - k)^2}$$

La distancia de P a la recta $x - h + p = 0$ es:

$$\overline{PF} = \frac{1(x) + 0(y) - h + p}{\sqrt{(1)^2 + (0)^2}} = x - h + p$$

Se igualan las distancias:

$$\sqrt{(x - (h + p))^2 + (y - k)^2} = x - h + p$$

Al elevar al cuadrado cada miembro y simplificar se obtiene:

$$\left(\sqrt{(x - h - p)^2 + (y - k)^2}\right)^2 = (x - h + p)^2$$

$$(x - h - p)^2 + (y - k)^2 = x^2 + h^2 + p^2 - 2hx + 2px - 2hp$$

$$x^2 + h^2 + p^2 - 2hx - 2px + 2hp + y^2 - 2ky + k^2 - x^2 - h^2 - p^2 + 2hx - 2px + 2hp = 0$$

$$y^2 - 4px - 2ky + 4hp + k^2 = 0$$

$$y^2 - 2ky + k^2 = 4px - 4hp$$

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

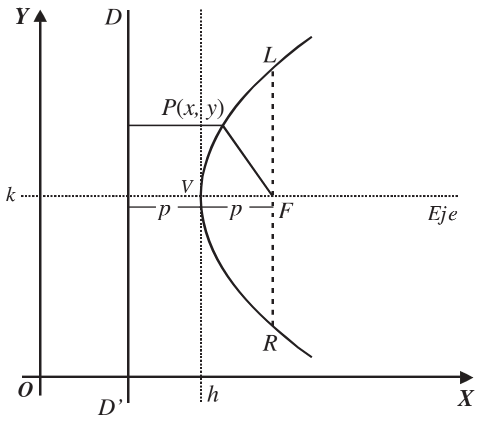
En forma análoga para una parábola con vértice fuera del origen en (h, k), coordenadas del foco en $F(h, k + p)$ y directriz en la recta $y = k - p$, se obtiene:

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

Elementos y ecuación de una parábola con vértice en (h, k)

Parábola horizontal

Su eje es paralelo al eje X y es cóncava hacia la derecha o izquierda.



Ecuación ordinaria:

$(y-k)^2 = 4p(x-h)$

Ecuación general: $Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Vértice: $V(h, k)$

Foco: $F(h + p, k)$

Directriz $\left(\overline{DD'}\right)$: $x = h - p$

Eje: $y = k$

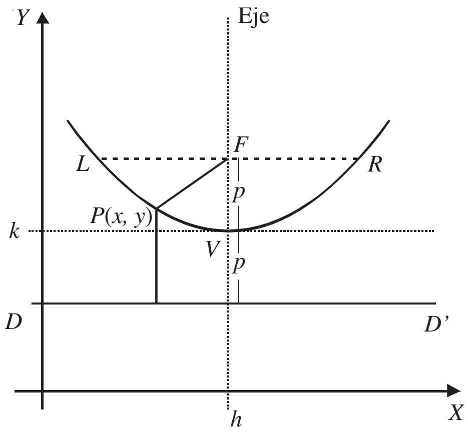
Lado recto: $LR = |4p|$

Concavidad

- Si $p > 0$ entonces la parábola es cóncava hacia la derecha.
- Si $p < 0$ entonces la parábola es cóncava hacia la izquierda.

Parábola vertical

Su eje es paralelo al eje Y, y es cóncava hacia arriba o abajo.



Ecuación ordinaria:

$(x-h)^2 = 4p(y-k)$

Ecuación general: $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$

Vértice: $V(h, k)$

Foco: $F(h, k + p)$

Directriz $\left(\overline{DD'}\right)$: $y = k - p$

Eje: $x = h$

Lado recto: $LR = |4p|$

Concavidad

- Si $p > 0$ entonces la parábola es cóncava hacia arriba.
- Si $p < 0$ entonces la parábola es cóncava hacia abajo.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina los elementos y grafica la parábola $y^2 - 6y - 8x + 17 = 0$.

Solución

El término cuadrático es y, por tanto, la parábola es horizontal, entonces se agrupan los términos con y en el primer miembro de la igualdad.

$$y^2 - 6y - 8x + 17 = 0$$

$$y^2 - 6y = 8x - 17$$

Se completa el trinomio cuadrado perfecto en el primer miembro y se factoriza.

$$y^2 - 6y + 9 = 8x - 17 + 9$$

$$(y - 3)^2 = 8x - 8$$

Se factoriza el segundo miembro de la igualdad, tomando como factor común el coeficiente de la literal:

$$(y - 3)^2 = 8(x - 1)$$

La ecuación que se obtiene es de la forma: $(y - k)^2 = 4p(x - h)$, por consiguiente, el vértice es el punto:

$V(1, 3)$, $4p = 8$, de donde $p = 2$.

Se sustituye en los elementos de la parábola horizontal.

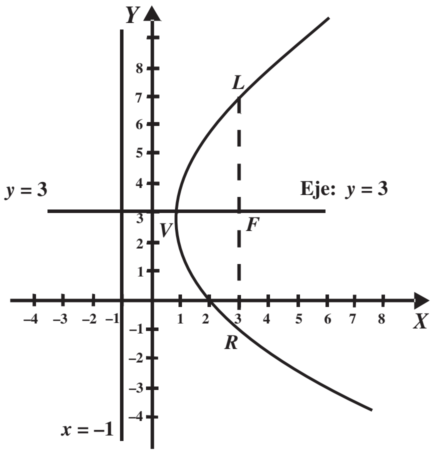
Foco: $F(h + p, k) = F(1 + 2, 3) = F(3, 3)$

Directriz: $x = h - p = 1 - 2 = -1 \rightarrow x + 1 = 0$

Lado recto: $LR = |4p| = |4(2)| = |8| = 8$

Ecuación del eje: $y = k$; $y = 3$

Gráfica:



2 Encuentra las coordenadas del vértice, del foco, la longitud del lado recto, la ecuación de la directriz y del eje de la parábola $4x^2 + 48x + 12y + 156 = 0$.

Solución

La parábola es vertical, ya que el término cuadrático es x; para transformarla a su forma ordinaria se realiza lo siguiente:

$4x^2 + 48x + 12y + 156 = 0$	Se divide la ecuación entre 4.
$x^2 + 12x + 3y + 39 = 0$	
$x^2 + 12x = -3y - 39$	Se agrupan los términos en x.
$x^2 + 12x + 36 = -3y - 39 + 36$	Se completa el trinomio cuadrado perfecto.
$x^2 + 12x + 36 = -3y - 3$	
$(x + 6)^2 = -3(y + 1)$	Se factoriza cada miembro.

La ecuación obtenida es de la forma: $(x - h)^2 = 4p(y - k)$, por tanto, el vértice tiene como coordenadas $V(-6, -1)$, $4p = -3$ donde $p = -\frac{3}{4}$.

Se sustituye en las fórmulas de los elementos para la parábola vertical:

Foco: $F(h, k + p) = F\left(-6, -1 + \left(-\frac{3}{4}\right)\right) = F\left(-6, -\frac{7}{4}\right)$

Directriz: $y = k - p$

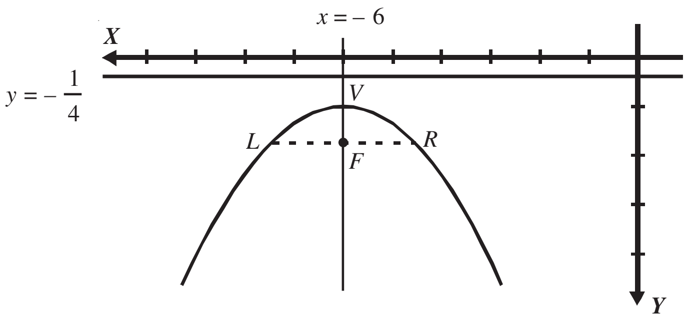
$$y = -1 - \left(-\frac{3}{4}\right) \quad \rightarrow \quad y = -\frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad y + \frac{1}{4} = 0 \quad \rightarrow \quad 4y + 1 = 0$$

Lado recto: $|4p| = \left|4\left(-\frac{3}{4}\right)\right| = |-3| = 3$

Eje: $x = h$

$$x = -6 \rightarrow x + 6 = 0$$

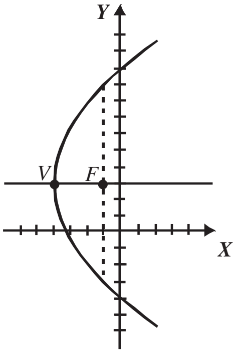
Gráfica:



3 Determina la ecuación general de la parábola cuyo vértice y foco son los puntos (– 4, 3) y (– 1, 3), respectivamente.

Solución

Se grafican los datos y se observa que la parábola tiene su eje paralelo al eje x y es cóncava hacia la derecha, por consiguiente su ecuación es de la forma $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ con $h = -4$, $k = 3$ y $p = 3$.



Al sustituir los valores en la ecuación se obtiene:

$$(y - 3)^2 = 4(3)(x - (-4))$$

Forma ordinaria: $(y - 3)^2 = 12(x + 4)$

Se desarrolla y simplifica: $y^2 - 6y + 9 = 12x + 48$

$$y^2 - 6y + 9 - 12x - 48 = 0$$

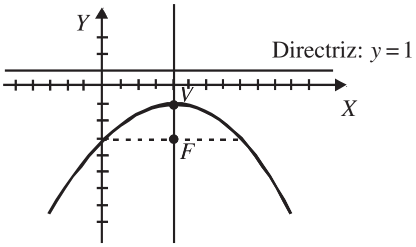
Forma general: $y^2 - 12x - 6y - 39 = 0$

Por consiguiente, la ecuación de la parábola es: $y^2 - 12x - 6y - 39 = 0$.

4 La directriz de una parábola es la recta $y - 1 = 0$, y su foco es el punto $(4, -3)$, encuentra su ecuación.

Solución

Se grafican los datos:



Al relacionar las fórmulas de los elementos de la parábola vertical con los datos, se obtienen las coordenadas del vértice y el valor del parámetro.

Foco: $F(h, k + p) = F(4, -3) \rightarrow h = 4$ y $k + p = -3$

Directriz: $y = k - p = 1 \rightarrow k - p = 1$

Se resuelve el sistema de ecuaciones:

$$k + p = -3$$
$$k - p = 1$$

Los valores que se obtienen son:

$$h = 4,\ k = -1 \text{ y } p = -2$$

Las coordenadas del vértice son $V(4, -1)$ y el parámetro $p = -2$

Se sustituye el vértice y el parámetro en:

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$
$$(x - 4)^2 = 4(-2)(y + 1)$$
$$(x - 4)^2 = -8(y + 1)$$
$$x^2 - 8x + 16 = -8y - 8$$
$$x^2 - 8x + 8y + 16 + 8 = 0$$
$$x^2 - 8x + 8y + 24 = 0$$

Por tanto, la ecuación de la parábola es: $x^2 - 8x + 8y + 24 = 0$.

EJERCICIO 27

Dadas las ecuaciones de las parábolas, determina sus elementos: vértice, foco, directriz, eje y lado recto.

1. $y^2 - 10y - 12x + 37 = 0$
2. $x^2 - 12x + 16y + 68 = 0$
3. $y^2 + 8y + 20x + 56 = 0$
4. $x^2 + 2x + 4y - 19 = 0$
5. $y^2 - 8x - 16 = 0$
6. $x^2 - 24y + 48 = 0$
7. $x^2 + 8x - 6y + 28 = 0$
8. $y^2 - 5x + 6y + 13 = 0$
9. $4x^2 - 12x - 16y + 41 = 0$
10. $16y^2 + 8y - 24x + 49 = 0$
11. $4x^2 - 4x - 16y - 23 = 0$
12. $3y^2 + 6y - 4x + 15 = 0$
13. $2x^2 - 4y + 1 = 0$
14. $4y^2 - 5x + 5 = 0$

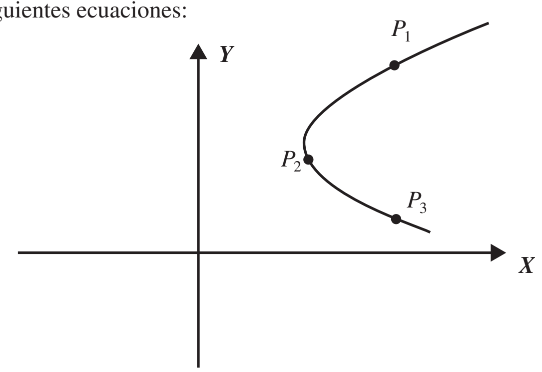
Resuelve los siguientes problemas:

15. Encuentra la ecuación de la parábola cuyo vértice es el punto $V(2, 4)$ y su foco $F(-3, 4)$
16. Obtén la ecuación de la parábola cuyo vértice es el punto $V(3, -1)$ y su foco $F(3, -5)$
17. Encuentra la ecuación de la parábola cuyo vértice y foco son los puntos (3, 2) y (5, 2), respectivamente.
18. Obtén la ecuación de la parábola cuyo vértice y foco son los puntos (– 5, 2) y (– 5, 5)
19. Determina la ecuación de la parábola cuyo vértice y foco son los puntos (2, – 4) y $\left(\frac{5}{2}, -4\right)$
20. Determina la ecuación de la parábola cuyo vértice y foco son los puntos (– 3, – 2) y $\left(-3, \frac{1}{3}\right)$
21. El foco de una parábola es el punto (– 2, 6) y su directriz $x = 10$. Encuentra su ecuación.
22. Obtén la ecuación de la parábola cuyo foco es el punto (4, 5) y su directriz la recta $y + 3 = 0$
23. Determina la ecuación de la parábola cuyo foco es el punto (6, – 4) y su directriz la recta $x + 4 = 0$
24. El foco de una parábola es el punto (0, – 6) y su directriz la recta $y - 8 = 0$. Obtén su ecuación.
25. Determina la ecuación de la parábola cuyo foco es el punto (– 5, 2) y su directriz $x = 2$
26. Encuentra la ecuación de la parábola cuyo foco es el punto (7, 3) y su directriz la recta $y + 2 = 0$
27. Determina la ecuación de la parábola con vértice en el punto (1, – 3) y directriz la recta $y + 5 = 0$
28. Obtén la ecuación de la parábola cuyo vértice es el punto (– 3, 5), su lado recto mide 24 unidades y su eje es paralelo al eje Y (dos soluciones).
29. Determina la ecuación de la parábola cuyo vértice es el punto (5, 2) y su foco es el centro de la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$
30. Determina la ecuación de la parábola cuyo foco es el punto (3, – 2) y su vértice es el centro de la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 20 = 0$
31. Encuentra los puntos de intersección de la parábola $y^2 - 8y - 16x + 64 = 0$ con la recta $4x + y - 24 = 0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Ecuación de la parábola que pasa por tres puntos

Dados tres puntos P_1, P_2 y P_3, que pertenecen a una parábola horizontal o vertical, su ecuación se obtiene mediante las siguientes ecuaciones:



Ecuaciones generales de la parábola

Parábola horizontal:

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Parábola vertical:

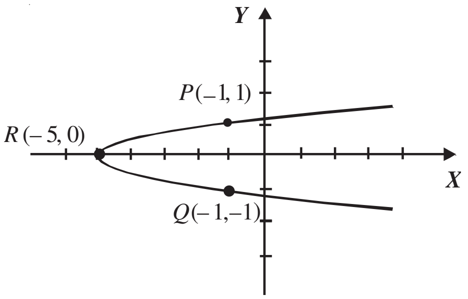
$$x^2 + Dx + Ey + F = 0$$

EJEMPLOS

1 Determina la ecuación general de la parábola cuyo eje es paralelo al eje X y que pasa por los puntos: $P(-1, 1)$, $Q(-1, -1)$ y $R(-5, 0)$

Solución

Al graficar los puntos se obtiene:



El eje de la parábola es paralelo al eje X, entonces la parábola es horizontal y la ecuación que se utiliza es:

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Al sustituir los puntos $P(-1, 1)$, $Q(-1, -1)$ y $R(-5, 0)$, se obtienen tres ecuaciones con tres incógnitas:

Para el punto $P(-1, 1)$ $\quad (1)^2 + D(-1) + E(1) + F = 0$

Ecuación 1: $\quad -D + E + F = -1$

Para el punto $Q(-1, -1)$ $\quad (-1)^2 + D(-1) + E(-1) + F = 0$

Ecuación 2: $\quad -D - E + F = -1$

Para el punto $R(-5, 0)$ $\quad (0)^2 + D(-5) + E(0) + F = 0$

Ecuación 3: $\quad -5D + 0E + F = 0$

Se obtiene un sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} -D + E + F &= -1 \\ -D - E + F &= -1 \\ -5D + 0E + F &= 0 \end{aligned}$$

Al resolver el sistema se obtiene: $D = -\dfrac{1}{4}$, $E = 0$, $F = -\dfrac{5}{4}$.

Se sustituyen estos valores en $y^2 + Dx + Ey + F = 0$ y se simplifica:

$$y^2 - \frac{1}{4}x + 0y - \frac{5}{4} = 0 \quad \rightarrow \quad 4y^2 - x - 5 = 0$$

Por tanto, la ecuación de la parábola es: $4y^2 - x - 5 = 0$.

EJERCICIO 28

Determina la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje X y pasa por los puntos:

1. (1, 0), (9, 2) y (0, – 1)
2. (0, 0), (1, – 2) y (4, – 4)
3. (19, 2), (10, – 1) y (7, 0)
4. (12, – 4), (21, 5) y (5, 3)

Obtén la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje Y y pasa por los puntos:

5. (1, 0), (5, 8) y (– 2, 15)
6. (3, 10), (0, 1) y (– 2, 5)
7. (0, 1), (– 2, 3) y (1, 6)
8. $\left(0, \frac{5}{2}\right)$, (1, 6) y (– 3, – 2)

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

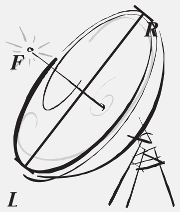
PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

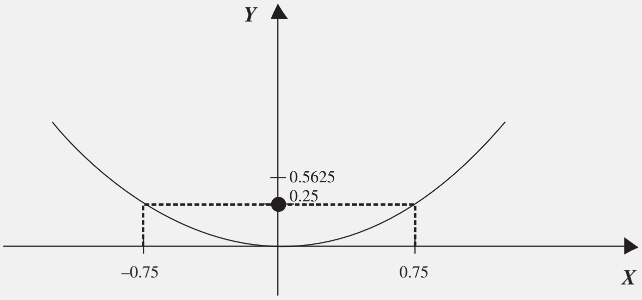
A continuación se dan ejemplos de problemas donde se aplica el concepto de parábola.

1 El diámetro de una antena parabólica es de 1.5 metros y su profundidad es de 25 centímetros. ¿A qué altura se debe colocar el receptor?

Solución

La reflexión es una de las propiedades importantes de la parábola. Cuando una onda emana del foco y choca con la parábola se produce una reflexión paralela al eje y viceversa si la onda viaja paralela al eje, al chocar con la parábola, se refleja y cruza por el foco. Luego, si se gira una parábola sobre su eje, se obtiene una superficie en revolución llamada paraboloide, es la forma que tienen precisamente las antenas parabólicas.





Se construye una parábola con vértice en el origen y eje vertical, si el diámetro de la antena es de 1.5 metros y su fondo mide 25 cm, entonces la parábola por ser simétrica, pasa por los puntos (– 0.75, 0.25) y (0.75, 0.25), por tanto sustituimos uno de estos puntos en la ecuación:

$$x^2 = 4py, \text{ para despejar } p.$$

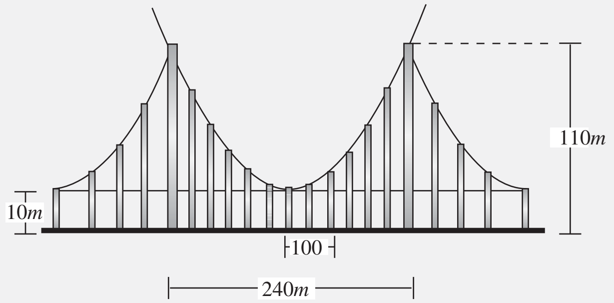
$$x^2 = 4py$$

$$(-0.75)^2 = 4p(0.25)$$

$$p = 0.5625$$

Las coordenadas del foco están dadas por $F(0, 0.5625)$, por consiguiente, se debe colocar el receptor a 56.25 centímetros del vértice.

2 Las dos torres de un puente colgante, como se muestra en la figura tienen una separación de 240m y una altura de 110m, si el puntal más corto mide 10m determina la altura de un puntal que se encuentra a 100m del centro.

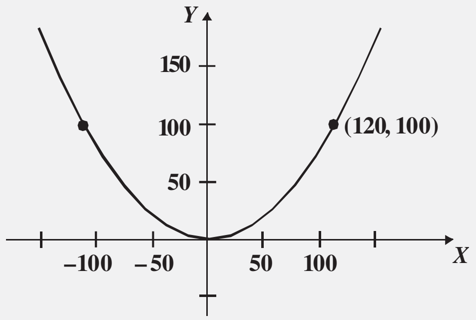


Solución

Se construye una parábola con vértice en el origen y eje vertical, si las torres están separadas 240m y su altura con respecto al vértice de la parábola es de 100m (110m – 10m = 100m), entonces la parábola pasa por los puntos:

$$(-120, 100) \text{ y } (120, 100)$$

Se sustituye el punto (120, 100) en la ecuación $x^2 = 4py$ para obtener p.



$$x^2 = 4py$$

$$(120)^2 = 4p(100)$$

$$p = 36$$

Por tanto, la ecuación es

$$x^2 = 4(36)y \quad \rightarrow \quad x^2 = 144y$$

Para encontrar la ordenada cuya abscisa es $x = 100$, se sustituye en la ecuación obtenida:

$$(100)^2 = 144y$$

$$y = 69.44$$

El puntal que se encuentra a 100 metros del centro mide:

$$69.44m + 10m = 79.4m$$

Ecuación de una recta tangente a una parábola

Si se tiene una parábola con vértice en el origen y una recta tangente en el punto (x_0, y_0), la ecuación de la recta está dada por:

$$\text{Horizontal: } y - y_0 = \frac{y_0}{2x_0}(x - x_0) \qquad \text{Vertical: } y - y_0 = \frac{2y_0}{x_0}(x - x_0)$$

Si se tiene una parábola con vértice (h, k) fuera del origen y una recta tangente en el punto (x_0, y_0), la ecuación de la recta está dada por:

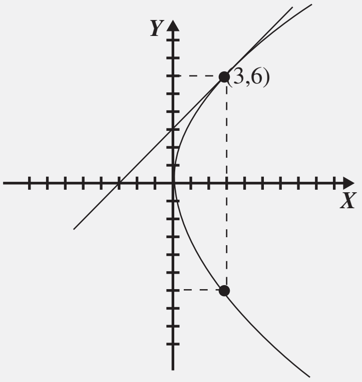
$$\text{Horizontal: } y - y_0 = \frac{y_0 - k}{2(x_0 - h)}(x - x_0) \qquad \text{Vertical: } y - y_0 = \frac{2(y_0 - k)}{x_0 - h}(x - x_0)$$

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1 Determina la ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2 - 12x = 0$, en el punto (3, 6).

Solución

Se sustituye el punto (3, 6) en la fórmula:



$$y - y_0 = \frac{y_0}{2x_0}(x - x_0)$$

$$y - 6 = \frac{6}{2(3)}(x - 3)$$

De donde se obtiene la ecuación:

$$x - y + 3 = 0$$

2 Determina la ecuación de la recta tangente a la parábola $4x^2 + 5y = 0$, en el punto (5, – 20).

Solución

Se sustituye el punto (5, – 20) en la fórmula:

$$y - y_0 = \frac{2y_0}{x_0}(x - x_0) \quad \rightarrow \quad y - (-20) = \frac{2(-20)}{5}(x - 5) \quad \rightarrow \quad 8x + y - 20 = 0$$

Por tanto, la ecuación de la recta es: $8x + y - 20 = 0$.

3 Encuentra la ecuación de la recta tangente a la curva $x^2 - 8x + 8y + 24 = 0$, en el punto (8, – 3).

Solución

Se transforma la ecuación de la parábola a su forma ordinaria.

$$x^2 - 8x + 8y + 24 = 0 \quad \rightarrow \quad (x - 4)^2 = -8(y + 1)$$

Se sustituye el vértice $V(h, k) = V(4, -1)$ y el punto (8, – 3) en la fórmula y se obtiene:

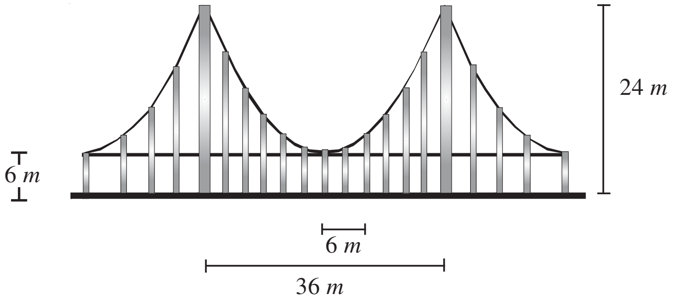
$$y - y_0 = \frac{2(y_0 - k)}{x_0 - h}(x - x_0) \quad \rightarrow \quad y - (-3) = \frac{2(-3 - (-1))}{8 - 4}(x - 8) \rightarrow x + y - 5 = 0$$

En consecuencia, la ecuación de la recta es: $x + y - 5 = 0$.

EJERCICIO 29

Resuelve los siguientes problemas:

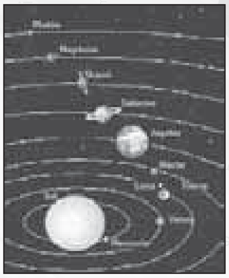
1. Dos torres de 24 metros de altura sostienen un puente colgante, como el que se muestra en la figura. Si las torres están separadas 36 metros y el puntal más corto mide 6 metros, ¿cuál es la altura de un puntal que se encuentra a 6 metros del centro?



2. El diámetro de una antena parabólica es de 2 *m* y su profundidad es de 40 *cm*. ¿A qué altura se debe colocar el receptor?
3. Se desea diseñar un faro que tenga 30 centímetros de diámetro. El filamento de la bombilla se encuentra a 3 *cm* del vértice. ¿Qué profundidad debe tener el faro si se quiere que el filamento quede justo en la posición de su foco?
4. Si en el ejercicio anterior se quiere que el faro tenga 2.75 *cm* menos de profundidad, ¿cuánto debe medir el diámetro?
5. Determina la ecuación de la recta tangente a la parábola $x^2 - 8y = 0$ en el punto (4, 2)
6. Obtén la ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2 - 6x = 0$ en el punto (24, 12)
7. Determina la ecuación de la recta tangente a la parábola $x^2 - 4x - 8y + 28 = 0$ en el punto (10, 11)
8. Calcula la ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2 - 12x + 6y + 57 = 0$ en el punto (16, 9)
9. Determina la ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2 - 4x + 4y + 28 = 0$ en el punto $P(15, 4)$
10. Obtén la ecuación de la recta tangente a la parábola $x^2 - 8x - 6y + 4 = 0$ en el punto $\left(6, -\frac{4}{3}\right)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Reseña HISTÓRICA



La elipse en el sistema solar

En el universo el movimiento más frecuente de estrellas, planetas, satélites, etc., es el descrito mediante trayectorias elípticas. Esto es así porque a grandes distancias y para objetos sin carga eléctrica neta importante, la fuerza principal que gobierna este movimiento es la fuerza gravitatoria.

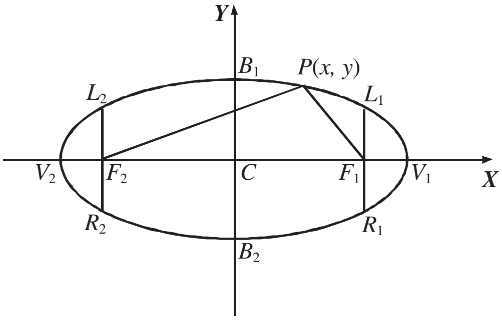
Fue el gran físico y matemático Isaac Newton quien formuló la ley de la gravitación universal, que explica los movimientos de los planetas y satélites en el sistema solar. Esta ley reúne las tres leyes de Kepler en una sola:

$$F = G\frac{Mm}{d^2}$$

Definición

Es el lugar geométrico que describe un punto del plano que se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante.

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$



C: Centro
V_1 y V_2: Vértices
F_1 y F_2: Focos
B_1 y B_2: Extremos del eje menor
$\overline{V_1V_2} = 2a$ (eje mayor)
$\overline{F_1F_2} = 2c$ (eje focal)
$\overline{B_1B_2} = 2b$ (eje menor)
Condición: $a^2 = b^2 + c^2$; $a > b$, $a > c$
Donde $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$
$\overline{LR} = \dfrac{2b^2}{a}$ (lado recto)
$e = \dfrac{c}{a} < 1$ excentricidad

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano cuyas sumas de distancias a los puntos fijos $F_1(0, 3)$ y $F_2(0, -3)$, son siempre iguales a 10 unidades.

Solución

Sea $P(x, y)$ un punto que cumple con la condición dada, mediante la fórmula: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ se encuentra la distancia a los puntos $F_1(0, 3)$ y $F_2(0, -3)$

$$\overline{PF_1} = \sqrt{x^2 + (y-3)^2}, \quad \overline{PF_2} = \sqrt{x^2 + (y-(-3))^2}$$

$$\sqrt{x^2 + (y-3)^2} + \sqrt{x^2 + (y+3)^2} = 10$$

Se despeja un radical y se elevan ambos miembros de la igualdad al cuadrado:

$$\sqrt{x^2 + (y-3)^2} = 10 - \sqrt{x^2 + (y+3)^2}$$

$$\left(\sqrt{x^2 + (y-3)^2}\right)^2 = \left(10 - \sqrt{x^2 + (y+3)^2}\right)^2$$

$$x^2 + (y-3)^2 = 100 - 20\sqrt{x^2 + (y+3)^2} + x^2 + (y+3)^2$$

$$x^2 + y^2 - 6y + 9 = 100 - 20\sqrt{x^2 + (y+3)^2} + x^2 + y^2 + 6y + 9$$

$$20\sqrt{x^2 + (y+3)^2} = 100 + 12y$$

$$5\sqrt{x^2 + (y+3)^2} = 25 + 3y$$

Se elevan al cuadrado ambos miembros y se obtiene:

$$\left(5\sqrt{x^2 + (y+3)^2}\right)^2 = (25 + 3y)^2$$

$$25(x^2 + y^2 + 6y + 9) = 625 + 150y + 9y^2$$

$$25x^2 + 25y^2 + 150y + 225 = 625 + 150y + 9y^2$$

$$25x^2 + 16y^2 = 400$$

Por tanto la ecuación de la curva es: $25x^2 + 16y^2 = 400$, la cual por la definición corresponde a una elipse.

2 Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que se mueven de tal manera que la suma de sus distancias a los puntos (3, 4) y (9, 4) es siempre igual a 8 unidades.

Solución

Al aplicar la definición de elipse se obtiene:

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}+\sqrt{(x-9)^2+(y-4)^2}=8$$

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}=8-\sqrt{(x-9)^2+(y-4)^2}$$

$$(x-3)^2+(y-4)^2=64-16\sqrt{(x-9)^2+(y-4)^2}+(x-9)^2+(y-4)^2$$

Se desarrollan y se simplifica para determinar la ecuación.

$$(3x-34)^2=\left(-4\sqrt{(x-9)^2+(y-4)^2}\right)^2$$

$$9x^2-204x+1156=16\left(x^2-18x+81\right)+16\left(y^2-8y+16\right)$$

$$9x^2-204x+1156=16x^2+16y^2-288x-128y+1552$$

$$7x^2+16y^2-84x-128y+396=0$$

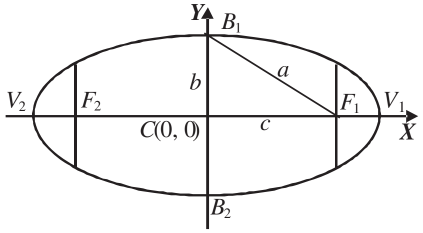
EJERCICIO 30

Determina la ecuación del lugar geométrico (elipse), según los datos proporcionados:

1. Un punto se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a los puntos (4, 0) y (–4, 0) es igual a 12.
2. Un punto se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a los puntos (2, 0) y (– 2, 0) es igual a 6.
3. Un punto se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a los puntos (0, 5) y (0, – 5) es igual a 14.
4. Un punto se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a los puntos (– 2, 1) y (– 2, 7) es siempre igual a 10.
5. Un punto se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a los puntos (9, – 2) y (– 7, – 2) siempre es igual a 20.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Ecuación de una elipse con centro en el origen



En la figura:

$\overline{CV_1}=\overline{CV_2}=a$

$\overline{CB_1}=\overline{CB_2}=b$

$\overline{CF_1}=\overline{CF_2}=c$

Como $\overline{CV_1}=\overline{CV_2}=a$, entonces $\overline{V_1V_2}=2a$ y al ser V_1 un punto de la elipse $\overline{V_1F_1}+\overline{V_1F_2}=2a$, por tanto, la suma de las distancias de cualquier punto de la elipse a los dos puntos fijos (focos) es igual a $2a$; como B_1 es un punto de la elipse, entonces por la definición $\overline{B_1F_1}+\overline{B_1F_2}=2a$, de donde $\overline{B_1F_1}=a$ y por la gráfica $a^2=b^2+c^2$.

Sea $P(x, y)$ un punto de la elipse, entonces por la definición $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$, se aplica la fórmula $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ para obtener la distancia de P a los puntos fijos $F_1(c, 0)$ y $F_2(-c, 0)$ se obtiene:

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

Se despeja un radical: $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$

Se elevan al cuadrado ambos miembros de la igualdad:

$$\left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$

Se despeja el radical y se divide entre -4:

$$-4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$cx + a^2 = a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Se eleva al cuadrado y se simplifica: $\left(cx + a^2\right)^2 = \left(a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2$

$$c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 \rightarrow \left(a^2 - c^2\right)x^2 + a^2y^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right)$$

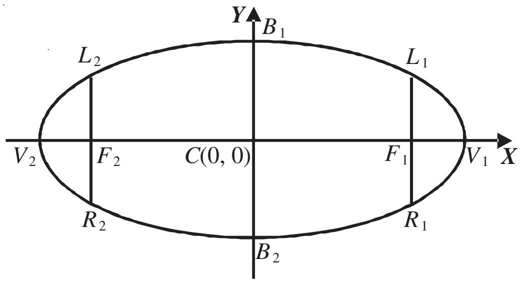
Se divide entre $a^2(a^2 - c^2)$: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$. Si $a^2 = b^2 + c^2$, entonces $b^2 = a^2 - c^2$, se sustituye y se obtiene: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Por tanto, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ es la ecuación de una elipse horizontal con centro en el origen; para una elipse vertical con centro en el origen se sigue un procedimiento análogo y se obtiene: $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

Elementos y ecuación

Elipse horizontal

El eje mayor coincide con el eje X.



Ecuación canónica: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Elementos:

Vértices: $V(\pm a, 0)$

Focos: $F(\pm c, 0)$

Extremos del eje menor: $B(0, \pm b)$

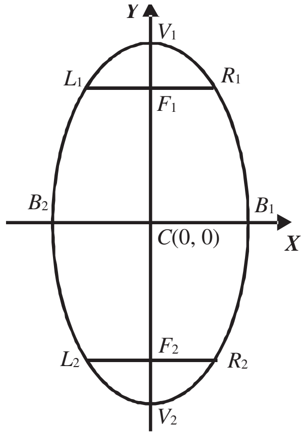
Lado recto: $\overline{LR} = \frac{2b^2}{a}$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$ $(e < 1)$

Condición: $a^2 = b^2 + c^2$; $a > b$, $a > c$ donde $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

Elipse vertical

El eje mayor coincide con el eje Y.



Ecuación canónica: $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

Elementos:

Vértices: $V(0, \pm a)$

Focos: $F(0, \pm c)$

Extremos del eje menor: $B(\pm b, 0)$

Lado recto: $\overline{LR} = \frac{2b^2}{a}$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$ $(e < 1)$

Condición: $a^2 = b^2 + c^2$; $a > b$, $a > c$ donde $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina los elementos y grafica la elipse, cuya ecuación es: $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$.

Solución

Se transforma la ecuación a su forma ordinaria.

$$9x^2 + 4y^2 = 36$$

Se divide por el término independiente, $\frac{9x^2}{36}+\frac{4y^2}{36}=\frac{36}{36}$

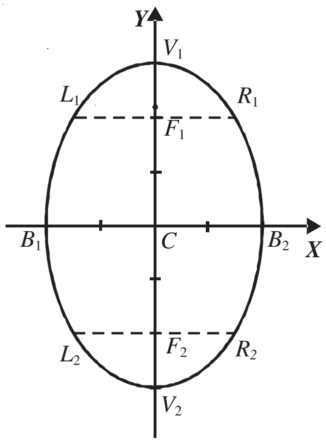
Se simplifica y se obtiene la forma canónica, $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

$a^2 = 9$ y $b^2 = 4$, porque $a > b$, de donde $a = 3$ y $b = 2$, entonces tenemos una elipse vertical de ecuación $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

Para encontrar c, se sustituye a^2 y b^2 en $c = \sqrt{a^2 - b^2}$,

$$c = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$$

Los elementos se obtienen al sustituir los valores de a, b y c en:



Vértices

$V_1(0, a)$ y $V_2(0, -a)$ → $V_1(0, 3)$ y $V_2(0, -3)$

Focos

$F_1(0, c)$ y $F_2(0, -c)$ → $F_1(0, \sqrt{5})$ y $F_2(0, -\sqrt{5})$

Extremos del eje menor

$B_1(b, 0)$ y $B_2(-b, 0)$ → $B_1(2, 0)$ y $B_2(-2, 0)$

$\overline{LR} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(2)^2}{3} = \frac{8}{3}$ Longitud del lado recto

$\overline{V_1V_2} = 2a = 2(3) = 6$ Longitud del eje mayor

$\overline{F_1F_2} = 2c = 2\sqrt{5}$ Longitud del eje focal

$\overline{B_1B_2} = 2b = 2(2) = 4$ Longitud del eje menor

$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ Excentricidad

2 Determina los elementos y grafica la elipse: $16x^2 + 25y^2 = 400$.

Solución

Se transforma la ecuación a su forma ordinaria.

$$16x^2 + 25y^2 = 400 \rightarrow \frac{16x^2}{400} + \frac{25y^2}{400} = \frac{400}{400}$$

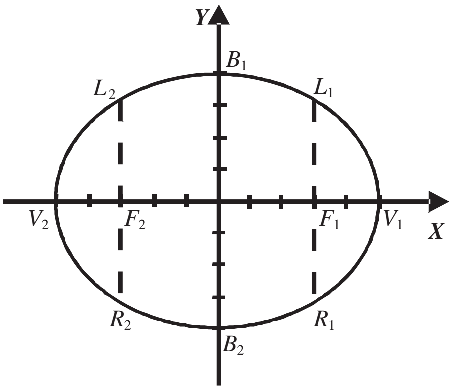
$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Como el denominador mayor se encuentra bajo la variable x esta ecuación corresponde a una elipse horizontal de la forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, donde $a^2 = 25$ y $b^2 = 16$, obteniendo que $a = 5$ y $b = 4$.

Para hallar c se sustituye a^2 y b^2 en $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

$$c = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$$

La gráfica y los elementos son:



Vértices

$V_1(5, 0)$ y $V_2(-5, 0)$

Focos

$F_1(3, 0)$ y $F_2(-3, 0)$

Extremos del eje menor

$B_1(0, 4)$ *y* $B_2(0, -4)$

$\overline{LR} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(4)^2}{5} = \frac{32}{5}$	Lado recto
$\overline{V_1V_2} = 2a = 2(5) = 10$	Longitud del eje mayor
$\overline{F_1F_2} = 2c = 2(3) = 6$	Longitud del eje focal
$\overline{B_1B_2} = 2b = 2(4) = 8$	Longitud del eje menor
$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$	Excentricidad

3 Determina las coordenadas de los focos de la elipse cuya ecuación es: $4x^2 + 9y^2 = 1$.

Solución

Se transforma la ecuación a su forma ordinaria.

$$4x^2 + 9y^2 = 1 \rightarrow \frac{4x^2}{1} + \frac{9y^2}{1} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y^2}{\frac{1}{9}} = 1$$

De la cual $a^2 = \frac{1}{4}$, $b^2 = \frac{1}{9}$ y $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{9-4}{36}} = \sqrt{\frac{5}{36}} = \frac{\sqrt{5}}{6}$

La ecuación tiene la forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, es decir, es una elipse horizontal.

Para encontrar los focos se sustituyen los valores:

$$F_1(c, 0) = F_1\left(\frac{\sqrt{5}}{6}, 0\right) \quad \rightarrow \quad F_2(-c, 0) = F_2\left(-\frac{\sqrt{5}}{6}, 0\right)$$

Por consiguiente, las coordenadas de los focos son: $F_1\left(\frac{\sqrt{5}}{6}, 0\right)$ y $F_2\left(-\frac{\sqrt{5}}{6}, 0\right)$.

EJERCICIO 31

Determina los elementos de las siguientes elipses:

1. $3x^2 + 4y^2 - 12 = 0$
2. $9x^2 + 5y^2 - 45 = 0$
3. $12x^2 + 5y^2 - 60 = 0$
4. $x^2 + 16y^2 - 64 = 0$
5. $9x^2 + 25y^2 = 225$
6. $16x^2 + 4y^2 = 64$
7. $9x^2 + 4y^2 = 25$
8. $4x^2 + y^2 = 1$
9. $3x^2 + 2y^2 = 6$
10. $16x^2 + 9y^2 - 1 = 0$
11. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$
12. $x^2 + 2y^2 - 1 = 0$
13. $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{5} = 1$
14. $100x^2 + 25y^2 - 200 = 0$
15. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} - 1 = 0$
16. $3x^2 + y^2 - 12 = 0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

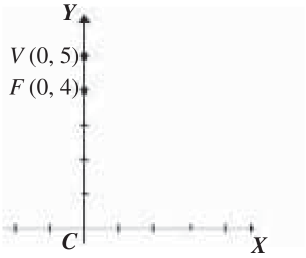
Dados sus elementos obtener la ecuación de la elipse con centro en el origen

EJEMPLOS

1 Determina la ecuación de la elipse de centro en el origen, vértice (0, 5) y foco en (0, 4).

Solución

Se grafican los datos.



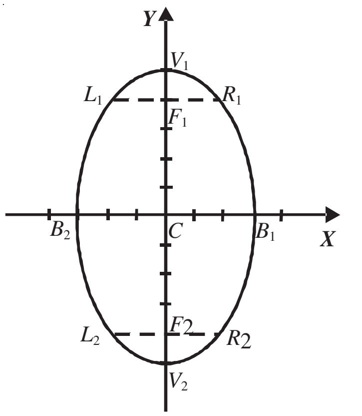
La elipse es vertical y su ecuación es $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, de la gráfica se obtiene la distancia del centro al vértice (a) y la distancia del centro al foco (c), por tanto:

$$a = 5 \text{ y } c = 4$$

Para encontrar b se sustituyen los valores de a y c en $b = \sqrt{a^2 - c^2}$:

$$b = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$$

Se sustituyen los valores de a y b y resulta la ecuación:



Forma canónica: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

Al multiplicar por 225 e igualar a cero, se obtiene la ecuación en su forma general:

$$25x^2 + 9y^2 = 225 \rightarrow 25x^2 + 9y^2 - 225 = 0$$

2 Determina la ecuación de la elipse con vértices en (– 6, 0) y (6, 0) y la longitud de uno de sus lados rectos igual a $\frac{20}{3}$.

Solución

El eje mayor (2a) es la distancia entre los vértices, utilizando la fórmula:

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, se obtiene:

$$2a = \sqrt{(6+6)^2 + (0-0)^2} \rightarrow 2a = 12 \rightarrow a = 6$$

Al sustituir $a = 6$, $\overline{LR} = \frac{20}{3}$ y despejar b^2 de la fórmula del lado recto $\overline{LR} = \frac{2b^2}{a}$, se obtiene:

$$\frac{2b^2}{6} = \frac{20}{3} \rightarrow b^2 = 20$$

La elipse es horizontal y la ecuación es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \quad \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$$

Se multiplica por 180 y tenemos que la ecuación es:

$$5x^2 + 9y^2 = 180 \qquad 5x^2 + 9y^2 - 180 = 0$$

3 El eje mayor de una elipse mide 20 unidades, si la excentricidad es $e = \frac{7}{10}$, ¿cuál es la longitud del eje menor?

Solución

El eje mayor es la distancia entre los vértices, $\overline{V_1V_2} = 2a = 20$.

$$2a = 20 \text{ por tanto, } a = 10$$

La excentricidad es $e = \frac{c}{a} = \frac{7}{10}$, de donde $\frac{c}{10} = \frac{7}{10}$.

Al despejar se obtiene que $c = 7$.
Si $a = 10$ y $c = 7$, se utiliza la condición $b = \sqrt{a^2 - c^2}$,

$$b = \sqrt{10^2 - 7^2} = \sqrt{100 - 49} = \sqrt{51}$$

Así, la longitud del eje menor es $2b = 2\sqrt{51}$.

EJERCICIO 32

Determina la ecuación de la elipse, según los datos proporcionados.

1. $V(\pm 6, 0)$ y $F(\pm 4, 0)$
2. $V(\pm 3, 0)$ y $F(\pm \sqrt{2}, 0)$
3. $V(\pm \sqrt{5}, 0)$ y $F(\pm 2, 0)$
4. $V(0, \pm 7)$ y $F(0, \pm 5)$
5. $V(0, \pm \sqrt{3})$ y $F(0, \pm \sqrt{2})$
6. $V(\pm 5, 0)$ y $B(0, \pm 4)$
7. $V(\pm 4, 0)$ y $B(0, \pm \sqrt{7})$
8. $F(\pm 3, 0)$ y $B(0, \pm 2)$
9. $F(\pm \sqrt{5}, 0)$ y $B(0, \pm 3)$
10. $F(0, \pm \sqrt{2})$ y $B(\pm 2, 0)$
11. $V(0, \pm \sqrt{5})$ y $B(\pm 1, 0)$
12. $F(0, \pm 7)$ y $B(\pm 4, 0)$
13. $F(0, \pm 2)$ y lado recto $= \frac{10}{3}$
14. $F(\pm 4, 0)$ y excentricidad $e = \frac{4}{5}$
15. $F(0, \pm\ 6)$ y excentricidad $e = \frac{3}{4}$
16. $B\left(0, \pm \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ y excentricidad igual a $\frac{1}{2}$
17. Excentricidad $= \frac{1}{3}$, lado recto $= \frac{16}{3}$ (dos soluciones).
18. Eje mayor paralelo al eje Y y pasa por los puntos $\left(\sqrt{3}, \frac{3}{2}\right)$ y $\left(1, \ -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$
19. $V(\pm 4, 0)$ y lado recto igual a 2
20. Focos los puntos de intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 - 4 = 0$ con el eje X, y lado recto $\frac{18\sqrt{13}}{13}$
21. El eje mayor es el doble del eje menor, su semidistancia focal es $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, y su eje focal coincide con el eje X.
22. La distancia focal equivale al eje menor y su lado recto es $\sqrt{2}$ (dos soluciones).

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Ecuación de una elipse con centro en el punto (*h, k*)

Para una elipse horizontal con centro fuera del origen en el punto (*h, k*), se hace una traslación de los ejes *XY* al punto *C*(*h, k*).

Sean $x' = x - h$, $y' = y - k$, la ecuación de la elipse en el nuevo sistema de coordenadas es:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

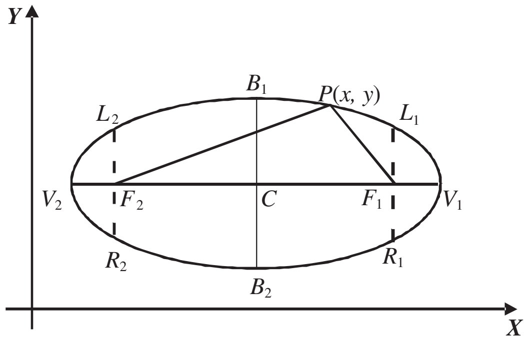
Se sustituyen *x'*, *y'* en la ecuación y se obtiene:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Del mismo modo se obtiene la ecuación de una elipse vertical con centro (*h, k*) fuera del origen:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Gráfica



Elementos:
C: Centro
V_1 y V_2: Vértices
F_1 y F_2: Focos
B_1 y B_2: Extremos del eje menor
$\overline{V_1V_2} = 2a$ (eje mayor)
$\overline{F_1F_2} = 2c$ (eje focal)
$\overline{B_1B_2} = 2b$ (eje menor)
Condición: $a^2 = b^2 + c^2$; $a > b$, $a > c$
Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$ $(e < 1)$
$\overline{LR} = \frac{2b^2}{a}$ (lado recto)

Elipse horizontal

Ecuación: $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

Elementos:

Vértices: $V(h \pm a, k)$

Focos: $F(h \pm c, k)$

Extremos del eje menor: $B(h, k \pm b)$

Elipse vertical

Ecuación: $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

Elementos:

Vértices: $V(h, k \pm a)$

Focos: $F(h, k \pm c)$

Extremos del eje menor: $B(h \pm b, k)$

Ecuación general de la elipse: $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, con $A \neq C$, y ambas cantidades de igual signo.

Dada la ecuación, obtener sus elementos

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina los elementos de la elipse $9x^2 + 4y^2 - 72x - 24y + 144 = 0$ y traza su gráfica.

Solución

$$9x^2 + 4y^2 - 72x - 24y + 144 = 0 \rightarrow 9x^2 + 4y^2 - 72x - 24y = -144$$

Se agrupan los términos en *xy:*

$$(9x^2 - 72x) + (4y^2 - 24y) = -144$$

Se factoriza:

$$9(x^2 - 8x) + 4(y^2 - 6y) = -144$$

Se completan los trinomios cuadrados perfectos:

$$9\left(x^2 - 8x + \left(\frac{8}{2}\right)^2\right) + 4\left(y^2 - 6y + \left(\frac{6}{2}\right)^2\right) = -144 + 9\left(\frac{8}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{6}{2}\right)^2$$

$$9(x^2 - 8x + (4)^2) + 4(y^2 - 6y + (3)^2) = -144 + 9(4)^2 + 4(3)^2$$

$$9(x^2 - 8x + 16) + 4(y^2 - 6y + 9) = -144 + 144 + 36$$

Al factorizar y simplificar, se obtiene,

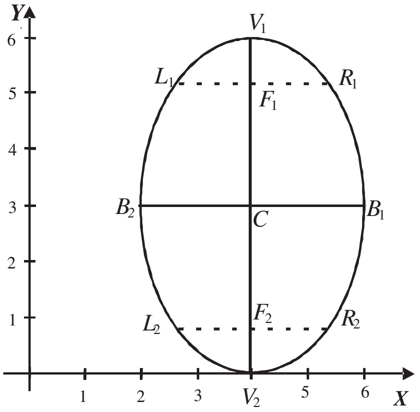
$$9(x - 4)^2 + 4(y - 3)^2 = 36$$

Se dividien ambos miembros entre 36:

$$\frac{9(x-4)^2}{36} + \frac{4(y-3)^2}{36} = \frac{36}{36} \rightarrow \frac{(x-4)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1 \rightarrow \frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Es una elipse vertical con centro en $C(4, 3)$, $a = 3$, $b = 2$, $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$

Estos datos se sustituyen para obtener los elementos y trazar la gráfica.



Centro $(h, k) = C(4, 3)$

Vértices $(h, k \pm a)$

$V_1(4, 3 + 3) = V_1(4, 6)$

$V_2(4, 3 - 3) = V_2(4, 0)$

Focos $(h, k \pm c)$

$F_1\left(4, 3+\sqrt{5}\right) = F_1\left(4, 5.2\right)$

$F_2\left(4, 3-\sqrt{5}\right) = F_2\left(4, 0.7\right)$

Extremos del eje menor $(h \pm b, k)$

$B_1(4 + 2, 3) = B_1(6, 3)$

$B_2(4 - 2, 3) = B_2(2, 3)$

$\overline{LR} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(4)}{3} = \frac{8}{3}$

$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

Eje mayor $= 2a = 6$

Eje menor $= 2b = 4$

Eje focal $= 2c = 2\sqrt{5}$

2 Determina los elementos de la elipse, cuya ecuación es:

$$x^2 + 16y^2 + 4x - 32y - 44 = 0$$

Solución

Se transforma la ecuación a su forma ordinaria,

$$x^2 + 16y^2 + 4x - 32y - 44 = 0 \rightarrow (x^2 + 4x) + (16y^2 - 32y) = 44$$

$$(x^2 + 4x) + 16(y^2 - 2y) = 44$$

Se completa el trinomio cuadrado perfecto, $(x^2 + 4x + 4) + 16(y^2 - 2y + 1) = 44 + 4 + 16$

Al factorizar y simplificar se obtiene: $(x + 2)^2 + 16(y - 1)^2 = 64$

Se divide entre 64, $\frac{(x+2)^2}{64} + \frac{16(y-1)^2}{64} = \frac{64}{64}$

Forma ordinaria: $\frac{(x+2)^2}{64} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$

La ecuación representa una elipse horizontal de la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Se obtienen las coordenadas del centro, el semieje mayor y el semieje menor:

Centro $C(-2, 1)$; $a = 8$ y $b = 2$, $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{64-4} = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$

Por tanto, los elementos y la gráfica son:

Centro: $C(h, k) = C(-2, 1)$

Vértices $V(h \pm a, k)$

$V_1(-2 + 8, 1) = V_1(6, 1)$

$V_2(-2 - 8, 1) = V_2(-10, 1)$

Focos $F(h \pm c, k)$

$F_1\left(-2+2\sqrt{15},\ 1\right) = (5.7,\ 1)$

$F_1\left(-2-2\sqrt{15},\ 1\right) = (-9.7,\ 1)$

Extremos del eje menor $B(h, k \pm b)$

$B_1(-2, 1 + 2) = B_1(-2, 3)$

$B_2(-2, 1 - 2) = B_2(-2, -1)$

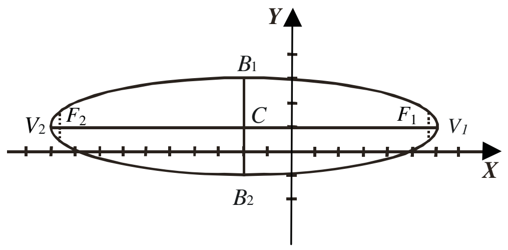
$\overline{LR} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(4)}{8} = \frac{8}{8} = 1$

$e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{15}}{8} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

Eje mayor: $2a = 16$

Eje menor: $2b = 4$

Eje focal: $2c = 4\sqrt{15}$



3 Determina las coordenadas de los vértices de la elipse cuya ecuación es:

$$4x^2 + 9y^2 - 4x - 6y + 1 = 0$$

Solución

Se transforma la ecuación a su forma ordinaria:

$$4x^2 + 9y^2 - 4x - 6y + 1 = 0 \rightarrow (4x^2 - 4x) + (9y^2 - 6y) = -1$$

$$4(x^2 - x) + 9\left(y^2 - \frac{2}{3}y\right) = -1 \rightarrow 4\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + 9\left(y^2 - \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}\right) = -1 + 1 + 1$$

$$4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 9\left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = 1 \rightarrow \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}} + \frac{\left(y - \frac{1}{3}\right)^2}{\frac{1}{9}} = 1$$, la ecuación tiene la forma de una elipse horizontal

$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, con centro en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ y $a^2 = \frac{1}{4} \rightarrow a = \frac{1}{2}$

Se sustituyen el centro y el valor de a para obtener los vértices:

$$V_1(h+a,k) = V_1\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = V_1\left(1, \frac{1}{3}\right) \quad \rightarrow \quad V_2(h-a,k) = V_2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = V_2\left(0, \frac{1}{3}\right)$$

EJERCICIO **33**

Determina los elementos de las siguientes elipses:

1. $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$
2. $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + 4(y-1)^2 = 4$
3. $\frac{(x+5)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{3} = 1$
4. $\frac{x^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$
5. $x^2 + 16y^2 - 10x + 64y + 73 = 0$
6. $4x^2 + y^2 - 16x - 6y - 11 = 0$
7. $36x^2 + 16y^2 + 180x - 24y + 90 = 0$
8. $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$
9. $9x^2 + 16y^2 + 42x - 24y + 57 = 0$
10. $18x^2 + 12y^2 + 60x + 84y + 161 = 0$
11. $5x^2 + 9y^2 + 30x - 36y + 36 = 0$
12. $4x^2 + 9y^2 + 20x - 24y + 5 = 0$
13. $4x^2 + 25y^2 + 4x - 120y + 45 = 0$
14. $x^2 + 4y^2 + 8y + 3 = 0$
15. $4x^2 + 3y^2 + 16x + 4 = 0$
16. $16x^2 + 9y^2 + 48x - 6y - 107 = 0$
17. $4x^2 + 9y^2 + 8x - 36y + 39 = 0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

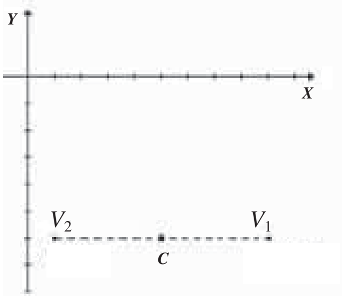
Dados sus elementos, obtener la ecuación

EJEMPLOS

1 Determina la ecuación de la elipse cuyos vértices son los puntos (1, – 6), (9, – 6) y la longitud de cada lado recto es $\frac{9}{2}$.

Solución

Se localizan los vértices en el plano cartesiano:



De la gráfica se deduce que la elipse es horizontal con centro $C(5, -6)$, y $\overline{V_1V_2} = 2a = 8$, donde $a = 4$.

Al sustituir $a = 4$ en la fórmula del lado recto y despejar b, se obtiene:

$$\overline{LR} = \frac{2b^2}{a} = \frac{9}{2} \rightarrow \frac{2b^2}{4} = \frac{9}{2}$$

$$b^2 = 9$$

$$b = 3$$

Para encontrar la ecuación de la elipse se sustituyen las coordenadas del centro (5, – 6), el semieje mayor $a = 4$ y el semieje menor b =3, en la fórmula:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{(x-5)^2}{(4)^2} + \frac{(y-(-6))^2}{(3)^2} = 1$$

Forma ordinaria: $$\frac{(x-5)^2}{16} + \frac{(y+6)^2}{9} = 1$$

Se desarrolla y simplifica la ecuación para obtener la forma general:

$$9(x-5)^2 + 16(y+6)^2 = 144$$

$$9(x^2 - 10x + 25) + 16(y^2 + 12x + 36) = 144$$

$$9x^2 - 90x + 225 + 16y^2 + 192y + 576 - 144 = 0$$

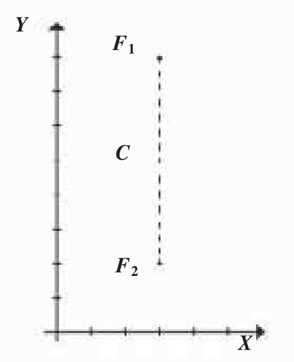
$$9x^2 + 16y^2 - 90x + 192y + 225 + 576 - 144 = 0$$

Forma general: $$9x^2 + 16y^2 - 90x + 192y + 657 = 0$$

2 Determina la ecuación de la elipse cuyos focos son los puntos (3, 8) y (3, 2), la longitud de su eje menor es 8.

Solución

Se localizan los focos en el plano cartesiano:



Es una elipse vertical y de la gráfica se obtienen las coordenadas del centro $C(3, 5)$ y el valor de $c = 3$, el eje menor es $2b$, por tanto,

$$2b = 8 \rightarrow b = 4$$

Se utiliza la condición para encontrar el valor de a (semieje mayor):

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

Con las coordenadas del centro, el semieje mayor y el semieje menor, se obtiene la ecuación de la elipse.

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \rightarrow \frac{(x-3)^2}{(4)^2} + \frac{(y-5)^2}{(5)^2} = 1$$

Forma ordinaria: $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1$

Se multiplica por 400: $25(x-3)^2 + 16(y-5)^2 = 400$

Se desarrollan los binomios y se simplifica,

$$25(x^2 - 6x + 9) + 16(y^2 - 10y + 25) - 400 = 0$$

Por consiguiente, la ecuación de la elipse en su forma general es:

$$25x^2 + 16y^2 - 150x - 160y + 225 = 0$$

EJERCICIO 34

Determina la ecuación en su forma ordinaria y general de la elipse, según los datos dados:

1. $C(7, -2)$, eje mayor = 8, eje menor = 4 y eje focal paralelo al eje X.
2. $V_1(-2, 3)$, $V_2(8, 3)$ y $F_1(-1, 3)$, $F_2(7, 3)$
3. $V_1(-2, -5)$, $V_2(-2, 3)$ y $F_1(-2, -4)$, $F_2(-2, 2)$
4. $V_1(0, 0)$, $V_2(8, 0)$ y $B_1(4, 3)$, $B_2(4, -3)$
5. $B_1(3, 2)$, $B_2(3, 6)$ y su eje mayor igual a 10 unidades.
6. $V_1(-4, 5)$, $V_2(16, 5)$ y su excentricidad es $\frac{4}{5}$
7. Su excentricidad es igual a $\frac{2}{3}$ y las coordenadas de sus focos son los puntos $(0, 0)$ y $(0, -4)$
8. $V_1(3, 4)$, $V_2(3, -8)$ y su excentricidad es $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
9. $V_1(-4, 6)$, $V_2(-4, -4)$ y uno de sus focos es el punto $(-4, -3)$
10. $C(-7, 5)$, $F_1\left(-7+4\sqrt{2},\ 5\right)$ y la longitud de su lado recto es $\frac{4}{3}$
11. $F_1(-9, -2)$, $F_2(-3, -2)$ y excentricidad $e = \frac{3}{5}$
12. $C\left(\frac{8}{3},\ -\frac{11}{2}\right)$, $LR = \frac{16}{3}$, excentricidad $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$ y eje mayor paralelo al eje X.
13. $C(5, 7)$, $LR = \frac{2}{3}$, $e = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ y eje focal paralelo al eje X.
14. $C(-4, 0)$, uno de sus focos en $(-1, 0)$ y la longitud de su lado recto igual a $\frac{7}{2}$
15. Es concéntrica con la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$, uno de sus focos es el punto $(3, 2)$ y su lado recto es $\frac{18}{5}$
16. El foco y el lado recto coinciden con los de la parábola, cuya ecuación es:
$$y^2 - 12x - 12y + 84 = 0$$
y su centro es el punto $(3, 6)$
17. El centro es el de la circunferencia $x^2 + y^2 + 10x - 6y + 9 = 0$, su foco el punto de tangencia de la circunferencia con el eje Y, y uno de sus vértices es el punto $(1, 3)$
18. El centro es el punto $(2, 1)$, el eje mayor paralelo al eje Y, y pasa por el punto $(1, 4)$ y su lado recto mide $\frac{4}{\sqrt{3}}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Casos especiales

Dada la ecuación general de la elipse $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ con $A \neq C$ pero del mismo signo, N es el identificador que permite conocer la representación geométrica de la ecuación, siendo $N = CD^2 + AE^2 - 4ACF$.

- Si $N > 0$ la ecuación representa una elipse.
- Si $N = 0$ la ecuación representa un punto.
- Si $N < 0$ la ecuación representa un conjunto vacío.

EJEMPLOS

1 Determina si la ecuación $8x^2 + 9y^2 - 16x - 54y + 89 = 0$ representa una elipse, un punto o un conjunto vacío.

Solución

Al aplicar la fórmula se determina que:

$$N = (9)(-16)^2 + (8)(-54)^2 - 4(8)(9)(89) = 2\,304 + 23\,328 - 25\,632 = 0$$

Por tanto, la ecuación representa un punto y al transformar a la forma ordinaria se obtiene:

$$8x^2 + 9y^2 - 16x - 54y + 89 = 0$$
$$(8x^2 - 16x) + (9y^2 - 54y) + 89 = 0$$
$$8(x^2 - 2x) + 9(y^2 - 6y) = -89$$
$$8(x^2 - 2x + 1) + 9(y^2 - 6y + 9) = -89 + 8 + 81$$
$$8(x - 1)^2 + 9(y - 3)^2 = 0$$

El punto que representa es el (1, 3).

2 Identifica la ecuación $3x^2 + 2y^2 - 6x + 4y - 1 = 0$.

Solución

Al utilizar la fórmula del identificador:

$$N = CD^2 + AE^2 - 4ACF$$
$$N = 2(-6)^2 + 3(4)^2 - 4(3)(2)(-1) = 72 + 48 + 24 = 144$$

Como $N > 0$, entonces dicha ecuación representa una elipse.

3 Identifica la ecuación $8x^2 + 3y^2 - 16x + 6y + 62 = 0$.

Solución

Al aplicar la fórmula del identificador:

$$N = CD^2 + AE^2 - 4ACF \rightarrow N = (3)(-16)^2 + (8)(6)^2 - 4(8)(3)(62)$$
$$= 768 + 288 - 5\,952$$
$$= -4\,896$$

Como $N < 0$, representa un conjunto vacío.

EJERCICIO 35

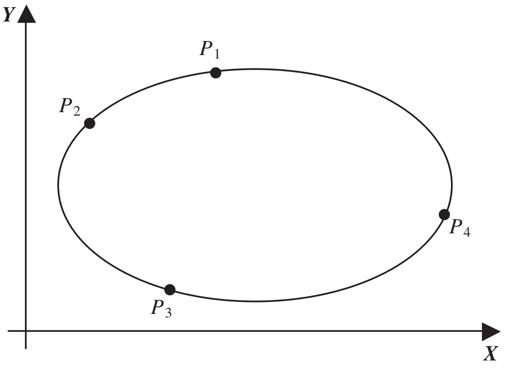
Determina si las siguientes ecuaciones representan una elipse, un punto o un conjunto vacío.

1. $2x^2 + 3y^2 + 6 = 0$
2. $4x^2 + 5y^2 + 8x - 10y + 9 = 0$
3. $x^2 + 2y^2 - 4x + 12y + 14 = 0$
4. $3x^2 + 2y^2 - 8y - 4 = 0$
5. $9x^2 + 4y^2 - 18x - 16y - 11 = 0$
6. $2x^2 + 3y^2 + 12x + 30 = 0$
7. $3x^2 + 4y^2 - 30x - 24y + 111 = 0$
8. $2x^2 + 3y^2 + 4x + 42y + 149 = 0$
9. $6x^2 + 5y^2 - 48x + 10y + 131 = 0$
10. $9x^2 + 4y^2 + 36x - 24y + 68 = 0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Ecuación de la elipse que pasa por cuatro puntos

Para encontrar la ecuación se sustituyen los puntos dados en la ecuación general y así se obtiene un sistema de ecuaciones con cuatro incógnitas, la solución del sistema determina los coeficientes de la ecuación.



Ecuación general de la elipse

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

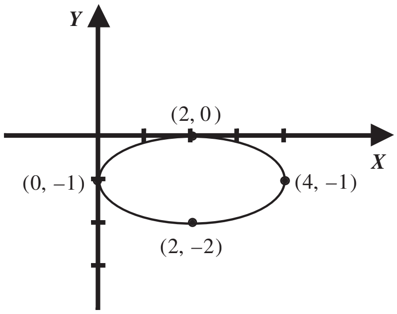
EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la ecuación de la elipse que pasa por los puntos (0, – 1), (2, 0), (4, – 1) y (2, – 2).

Solución

Se localizan los puntos:



Se sustituyen los puntos en la ecuación general de la elipse tomando $A = 1$; es decir se sustituye en $x^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

Punto (0, – 1)

$$(0)^2+(-1)^2C+(0)D+(-1)E+F=0 \rightarrow C-E+F=0$$

Punto (2, 0)

$$(2)^2+(0)^2C+(2)D+(0)E+F=0 \rightarrow 2D+F=-4$$

Punto (4, – 1)

$$(4)^2+(-1)^2C+(4)D+(-1)E+F=0 \rightarrow C+4D-E+F=-16$$

Punto (2, – 2)

$$(2)^2+(-2)^2C+(2)D+(-2)E+F=0 \rightarrow 4C+2D-2E+F=-4$$

Se obtiene un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, cuyos resultados son:

$$C = 4,\ D = -4,\ E = 8 \text{ y } F = 4$$

Estos valores se sustituyen en la ecuación general de la elipse:

$$x^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

Y, finalmente, se obtiene la ecuación de la elipse:

$$x^2 + 4y^2 - 4x + 8y + 4 = 0$$

2 Determina la ecuación de la elipse que pasa por los puntos (0, 3), (2, 0), $\left(1, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ y $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\sqrt{15}\right)$.

Solución

Se sustituyen los puntos en la ecuación general de la elipse tomando $A = 1$:

Punto (0, 3)

$$(0)^2+(3)^2C+(0)D+(3)E+F=0 \rightarrow 9C+3E+F=0$$

Punto (2, 0)

$$(2)^2+(0)^2C+(2)D+(0)E+F=0 \rightarrow 2D+F=-4$$

Punto $\left(1, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

$$(1)^2+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2C+(1)D+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)E+F=0 \rightarrow 27C+4D+6\sqrt{3}E+4F=-4$$

Punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\sqrt{15}\right)$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{15}}{4}\right)^2C+\left(\frac{1}{2}\right)D+\left(\frac{3\sqrt{15}}{4}\right)E+F=0 \rightarrow 135C+8D+12\sqrt{15}E+16F=-4$$

Se obtiene un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, cuyos resultados son:

$$C=\frac{4}{9},\ D=0,\ E=0 \text{ y } F=-4$$

Estos valores se sustituyen en la ecuación general de la elipse:

$$x^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \qquad x^2+\frac{4}{9}y^2-4=0$$

Finalmente el resultado es la ecuación de la elipse:

$$9x^2+4y^2-36=0$$

EJERCICIO 36

Encuentra la ecuación de la elipse que pasa por los siguientes puntos:

1. $(-7, -1), (-3, 2), (1, -1)$ y $(-3, -3)$
2. $(2, 5), (0, 2), (2, -1)$ y $(4, 2)$
3. $(4, 4), (5, 2), (4, 0)$ y $(3, 2)$
4. $(0, 0), (3, 1), \left(1, \frac{2\sqrt{2}+3}{3}\right)$ y $\left(1, \frac{3-2\sqrt{2}}{3}\right)$
5. $(-3, 0), (2, 2), \left(1, \frac{4\sqrt{6}}{5}\right)$ y $\left(3, \frac{-4\sqrt{6}}{5}\right)$
6. $(-4, 0), (0, 2), \left(1, \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$ y $\left(-2, \sqrt{3}\right)$
7. $\left(0, -\sqrt{3}\right), (1, 0), \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ y $\left(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$
8. $\left(1, \frac{6\sqrt{6}}{5}\right), \left(3, \frac{12}{5}\right), \left(-2, -\frac{3}{5}\sqrt{21}\right)$ y $\left(-4, \frac{9}{5}\right)$
9. $\left(0, \frac{3\sqrt{3}-6}{2}\right), \left(-2, \frac{-3\sqrt{3}-6}{2}\right), \left(\frac{2\sqrt{5}-3}{3}, -1\right)$ y $\left(\frac{-2\sqrt{5}-3}{3}, -5\right)$
10. $\left(1, \frac{-5\sqrt{3}-2}{2}\right), \left(\frac{-2\sqrt{21}+10}{5}, -3\right), \left(3, \frac{5\sqrt{3}-2}{2}\right)$ y $\left(\frac{2\sqrt{21}+10}{5}, 1\right)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1 Una de las leyes de Kepler sobre el movimiento planetario dice que "Los planetas se mueven en órbitas elípticas, donde el Sol precisamente se ubica en uno de sus focos".

Determina la longitud del semieje menor de la órbita de Mercurio, si su excentricidad es de 0.206 y su semieje mayor mide 0.387 unidades astronómicas (UA).

Solución

El semieje mayor es $a = 0.387$ y la excentricidad $e = \frac{c}{a} = 0.206$:

$$\frac{c}{0.387} = 0.206 \quad \rightarrow \quad c = 0.079722$$

Al sustituir en $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{(0.387)^2 - (0.079722)^2} = 0.3787$ UA

2 La tercera ley de Kepler dice que "El cuadrado del periodo p de un planeta es proporcional al cubo de su distancia media al Sol". Determina el periodo de Saturno, si su distancia media al Sol es de 9.539 UA.

Solución

$$p^2 = a^3 \quad \rightarrow \quad p = \sqrt{a^3} \quad \rightarrow \quad p = \sqrt{(9.539)^3} = 29.46 \text{ años}$$

Ecuación de una recta tangente a una elipse

Si se tiene una elipse con centro en el origen y una recta tangente en el punto (x_0, y_0), la ecuación de la recta está dada por:

$$\text{Horizontal: } \frac{x_0 x}{a^2}+\frac{y_0 y}{b^2}=1 \qquad \text{Vertical: } \frac{x_0 x}{b^2}+\frac{y_0 y}{a^2}=1$$

Si se tiene una parábola con vértice (h, k) fuera del origen y una recta tangente en el punto (x_0, y_0), la ecuación de la recta está dada por:

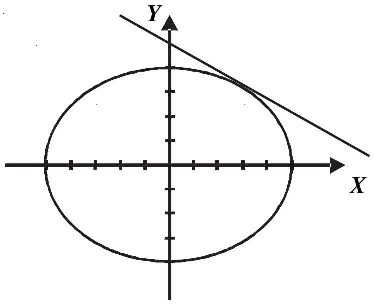
$$\text{Horizontal: } \frac{(x_1-h)(x-h)}{a^2}+\frac{(y_1-k)(y-k)}{b^2}=1$$

$$\text{Vertical: } \frac{(x_1-h)(x-h)}{b^2}+\frac{(y_1-k)(y-k)}{a^2}=1$$

Ejemplo

Determina la ecuación de la recta tangente a la elipse $16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$, en el punto $\left(3, \frac{16}{5}\right)$.

Solución



Se expresa la ecuación en su forma ordinaria:

$$16x^2 + 25y^2 - 400 = 0 \;\rightarrow\; \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

Donde $a^2 = 25$ y $b^2 = 16$

Al sustituir estos valores y el punto $\left(3, \frac{16}{5}\right)$ en la fórmula $\frac{x_0 x}{a^2}+\frac{y_0 y}{b^2}=1$, se obtiene:

$$\frac{(3)x}{25}+\frac{\left(\frac{16}{5}\right)y}{16}=1$$

Al simplificar se determina que:

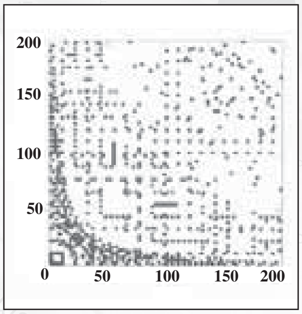
$$\frac{3x}{25}+\frac{y}{5}=1 \rightarrow 3x + 5y - 25 = 0$$

EJERCICIO 37

1. Determina la longitud del semieje menor de la órbita de Neptuno, si su excentricidad es de 0.009 y su semieje mayor mide 30.06 UA.
2. Calcula la longitud del semieje menor de la órbita de Venus, si su excentricidad es de 0.007 y su semieje mayor mide 0.723 UA.
3. Encuentra el periodo de Marte si su distancia media al Sol es de 1.52 UA.
4. Obtén el periodo de Júpiter si su distancia media al Sol es de 5.2 UA.
5. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la elipse $9x^2 + y^2 - 9 = 0$, en el punto $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$?
6. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la elipse $16x^2 + 25y^2 - 96x - 100y - 156 = 0$, en el punto $\left(6, \frac{26}{5}\right)$?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

PALINDROMÍA



Palíndromo numérico
que forma una hipérbola

Palindromía son aquellas frases o cantidades numéricas que pueden ser leídas de derecha a izquierda o viceversa.

A TI MI AMA IMITA
TU MAMA MAMUT

Un ejemplo de un palíndromo numérico es el gráfico de la izquierda, en el cual se observa que en la zona inferior izquierda se distingue perfectamente una hipérbola. El eje horizontal da los enteros x y el vertical indica el factor a. Un punto en el gráfico indica que ax es palíndromo.

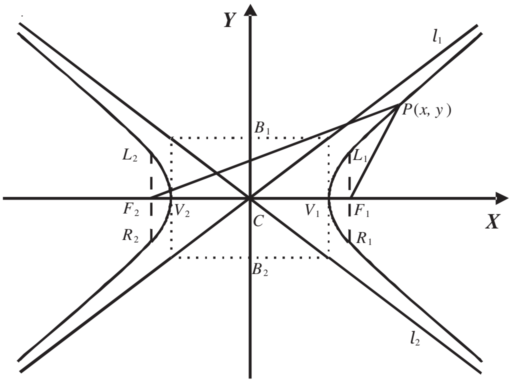
Se observa que la distribución no es uniforme, aunque se aprecian unas interesantes regularidades. Por ejemplo los puntos bastante equidistantes para $x = 45$, $x = 101$, $x = 11$ y otros.

Definición

Es el lugar geométrico que describe un punto del plano que se mueve de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos, es siempre constante.

$$\left| \overline{PF_1} - \overline{PF_2} \right| = 2a$$

Gráfica



Elementos

C: Centro

V_1 y V_2: Vértices

F_1 y F_2: Focos

B_1 y B_2: Extremos del eje conjugado

$\overline{V_1V_2} = 2a$ (eje transverso o real)

$\overline{F_1F_2} = 2c$ (eje focal)

$\overline{B_1B_2} = 2b$ (eje conjugado o imaginario)

Condición: $c^2 = a^2 + b^2; c > b, c > a$

Excentricidad: $e = \dfrac{c}{a}$ $(e > 1)$

$\overline{LR} = \dfrac{2b^2}{a}$ (lado recto)

l_1 y l_2: Asíntotas

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano, cuya diferencia de sus distancias a los puntos fijos (5, 0) y (– 5, 0), es siempre igual a 8 unidades.

Solución

Se obtienen las distancias del punto $P(x, y)$ a los puntos fijos (focos),

$$\overline{PF_1} = \sqrt{(x-5)^2 + y^2} \text{ y } \overline{PF_2} = \sqrt{(x+5)^2 + y^2}$$

Y se aplica la definición de hipérbola,

$$\sqrt{(x-5)^2 + y^2} - \sqrt{(x+5)^2 + y^2} = 8$$

Se despeja un radical y se elevan ambos miembros de la igualdad al cuadrado,

$$\sqrt{(x-5)^2 + y^2} = 8 + \sqrt{(x+5)^2 + y^2} \rightarrow \left(\sqrt{(x-5)^2 + y^2}\right)^2 = \left(8 + \sqrt{(x+5)^2 + y^2}\right)^2$$

Al desarrollar se determina que:

$$(x-5)^2 + y^2 = 64 + 16\sqrt{(x+5)^2 + y^2} + (x+5)^2 + y^2 \rightarrow -4\sqrt{(x+5)^2 + y^2} = 5x + 16$$

Ahora al elevar ambos miembros al cuadrado resulta que,

$$\left(-4\sqrt{(x+5)^2 + y^2}\right)^2 = (5x+16)^2 \rightarrow 16(x^2 + y^2 + 10x + 25) = 25x^2 + 160x + 256$$

Finalmente, se simplifica y se obtiene la ecuación: $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$.

2 Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que se mueven de tal manera que la diferencia de sus distancias a los puntos fijos (–2, 2) y (4, 2), es igual a 4.

Solución

Se aplica la definición y se obtiene:

$$\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2}-\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}=4$$

Se despeja una raíz y se elevan al cuadrado ambos miembros:

$$\left(\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2}\right)^2=\left(4+\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}\right)^2$$

$$(x+2)^2+(y-2)^2=16+8\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}+(x-4)^2+(y-2)^2$$

$$x^2+4x+4=16+8\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}+x^2-8x+16$$

$$12x-28=8\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}$$

$$3x-7=2\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}$$

$$(3x-7)^2=\left(2\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}\right)^2$$

$$9x^2-42x+49=4x^2-32x+64+4y^2-16y+16$$

$$5x^2-4y^2-10x+16y-31=0$$

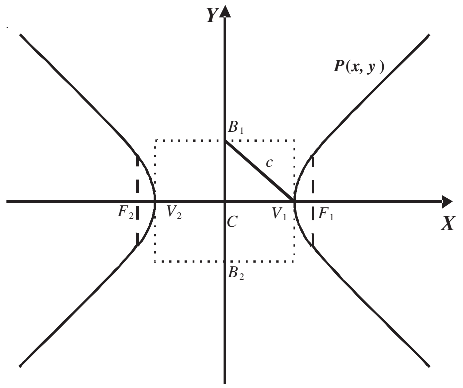
EJERCICIO **38**

Resuelve lo siguiente:

1. Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que se mueven de tal manera que la diferencia de sus distancias a los puntos (–3, 0) y (3, 0), es siempre igual a 4
2. Encuentra la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que se mueven de tal manera que la diferencia de sus distancias a los puntos (–5, 0) y (5, 0), es siempre igual a 6
3. Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que se mueven de tal manera que la diferencia de sus distancias a los puntos (0, –7) y (0, 7), es siempre igual a 12
4. Obtén la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que se mueven de tal manera que la diferencia de sus distancias a los puntos (0, 4) y (0, –4), es siempre igual a 5
5. Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que se mueven de tal manera que la diferencia de sus distancias a los puntos $\left(\sqrt{7},0\right)$ y $\left(-\sqrt{7},0\right)$, es siempre igual a 4
6. Encuentra el lugar geométrico de los puntos del plano que se mueven de tal manera que la diferencia de sus distancias a los puntos (9, 4) y (1, 4), es siempre igual a 6
7. Determina el lugar geométrico de los puntos del plano que se mueven de tal manera que la diferencia de sus distancias a los puntos (–3, 7) y (–3, –3), es siempre igual a 8

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Ecuación de una hipérbola con centro en el origen



En la figura:

$\overline{CV_1} = \overline{CV_2} = a$

$\overline{CB_1} = \overline{CB_2} = b$

$\overline{CF_1} = \overline{CF_2} = c$

$\overline{CV_1} = \overline{CV_2} = a$, entonces, $\overline{V_1V_2} = 2a$ al ser V_1 un punto de la hipérbola se tiene que: $\overline{V_1F_2} - \overline{V_1F_1} = 2a$, por tanto, la diferencia de las distancias de cualquier punto de la hipérbola a los dos puntos fijos (focos) es igual a $2a$.

La distancia de $B_1(0, b)$ a $V_1(a, 0)$ es: $\overline{B_1V_1} = \sqrt{(a-0)^2 + (0-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2} = c$, de donde $b^2 = c^2 - a^2$, sea $P(x, y)$ un punto de la hipérbola, al hallar la distancia de P a los puntos fijos $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$ y al aplicar la definición $\overline{PF_2} - \overline{PF_1} = 2a$, se obtiene:

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a \rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

Se despeja una radical: $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

Se elevan al cuadrado ambos miembros de la igualdad:

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

Se despeja el radical y se divide entre $4a$:

$$4cx - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \rightarrow \frac{cx}{a} - a = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Se eleva al cuadrado y se simplifica:

$$\left(\frac{cx}{a} - a\right)^2 = \left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 \rightarrow \frac{c^2x^2}{a^2} - 2cx + a^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

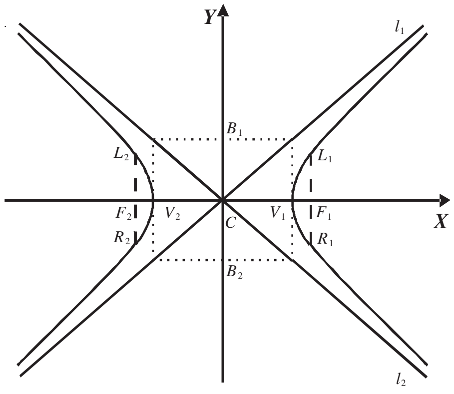
$\frac{c^2x^2}{a^2} - x^2 - y^2 + a^2 - c^2 = 0 \rightarrow \frac{c^2 - a^2}{a^2}x^2 - y^2 = c^2 - a^2$, se divide entre $c^2 - a^2$:

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$, pero $b^2 = c^2 - a^2$, se sustituye y se obtiene: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, la cual es la ecuación de una hipérbola horizontal con centro en el origen.

De forma análoga para una hipérbola vertical, resulta la ecuación: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

Elementos y ecuación

Hipérbola horizontal



Ecuación canónica

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Elementos

Vértices: $V(\pm a, 0)$

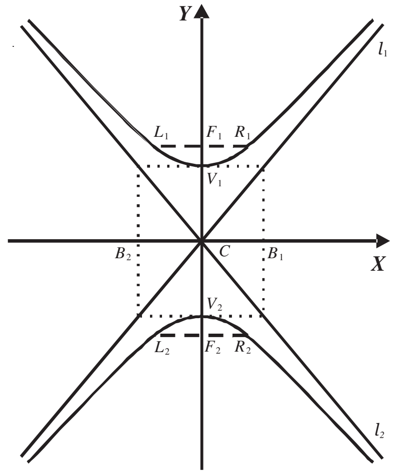
Focos: $F(\pm c, 0)$

Extremos del eje conjugado: $B(0, \pm b)$

Ecuaciones de las asíntotas:

$$l_1\!: y = \frac{b}{a}x \qquad l_2\!: y = -\frac{b}{a}x$$

Hipérbola vertical



Ecuación canónica

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

Elementos

Vértices: $V(0, \pm a)$

Focos: $F(0, \pm c)$

Extremos del eje conjugado: $B(\pm b, 0)$

Ecuaciones de las asíntotas

$$l_1\!: y = \frac{a}{b}x \qquad l_2\!: y = -\frac{a}{b}x$$

Para hipérbolas horizontales y verticales se tiene que:

Condición: $c^2 = a^2 + b^2$; $c > b$, $c > a$, excentricidad: $e = \dfrac{c}{a}$ $(e > 1)$, lado recto: $\overline{LR} = \dfrac{2b^2}{a}$

Eje transverso: $2a$, eje conjugado: $2b$, eje focal: $2c$.

Dada la ecuación, obtener sus elementos

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina los elementos y traza la gráfica de la hipérbola, cuya ecuación es:

$$9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$$

Solución

Se transforma la ecuación a la forma canónica:

$$9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$$

Se divide entre el término independiente y se simplifica:

$$9x^2 - 4y^2 = 36$$

$$\frac{9x^2}{36} - \frac{4y^2}{36} = \frac{36}{36} \rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1 \text{ Ecuación en su forma canónica.}$$

La ecuación representa una hipérbola horizontal de la forma: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

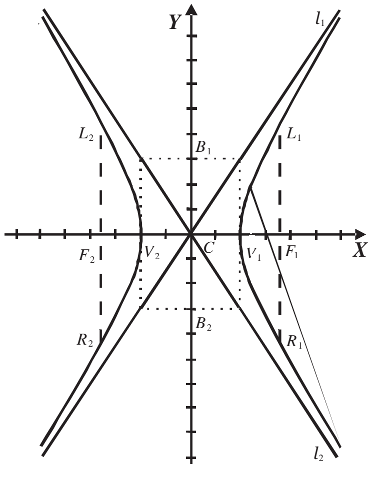
De la cual se obtiene el semieje transverso a y el semieje conjugado b:

$$a^2 = 4 \rightarrow a = 2 \text{ y } b^2 = 9 \rightarrow b = 3$$

Se aplica la condición para encontrar el valor de c (distancia del centro al foco):

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

Al sustituir: $a = 2$, $b = 3$ y $c = \sqrt{13}$, se obtiene:



Vértices: $V(\pm a, 0) = V(\pm 2, 0)$

Focos: $F(\pm c, 0) = F\left(\pm\sqrt{13}, 0\right)$

Extremos del eje conjugado:

$$B(0, \pm b) = B(0, \pm 3)$$

Asíntotas:

$$l_1: y = \frac{3}{2}x \rightarrow 3x - 2y = 0$$

$$l_2: y = -\frac{3}{2}x \rightarrow 3x + 2y = 0$$

Lado recto: $\overline{LR} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(3)^2}{2} = \frac{18}{2} = 9$

Eje transverso: $\overline{V_1V_2} = 2a = 2(2) = 4$

Eje focal: $\overline{F_1F_2} = 2c = 2\sqrt{13}$

Eje conjugado: $\overline{B_1B_2} = 2b = 2(3) = 6$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2}$

2 Determina los elementos de la hipérbola cuya ecuación es $x^2 - 4y^2 + 4 = 0$.

Solución

Se transforma la ecuación $x^2 - 4y^2 + 4 = 0$ a su forma canónica:

$$x^2 - 4y^2 = -4$$

$$\frac{x^2}{-4} - \frac{4y^2}{-4} = \frac{-4}{-4}$$ Se divide entre el término independiente.

$$\frac{x^2}{-4} + \frac{y^2}{1} = 1$$ Se simplifican las fracciones.

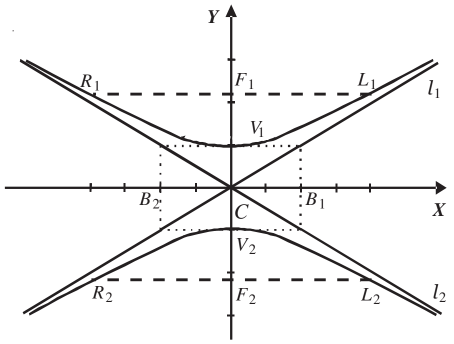
$$\frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{4} = 1$$ Ecuación en su forma canónica.

Es una hipérbola vertical de la forma: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$.

De la cual $a^2 = 1$ y $b^2 = 4$, por tanto, $a = 1$ y $b = 2$.

El valor de c es: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$.

Con los valores de $a = 1$, $b = 2$ y $c = \sqrt{5}$, se determinan los elementos y la gráfica.



Vértices: $V(0, \pm a) = V(0, \pm 1)$

Focos: $F(0, \pm c) = F(0, \pm\sqrt{5})$

Extremos del eje conjugado:

$$B(\pm b, 0) = B(\pm 2, 0)$$

Asíntotas

$$l_1: y = \frac{1}{2}x \rightarrow x - 2y = 0$$

$$l_2: y = -\frac{1}{2}x \rightarrow x + 2y = 0$$

Lado recto: $\overline{LR} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(2)^2}{1} = 8$

Eje transverso: $\overline{V_1V_2} = 2a = 2(1) = 2$

Eje focal: $\overline{F_1F_2} = 2c = 2\sqrt{5}$

Eje conjugado: $\overline{B_1B_2} = 2b = 2(2) = 4$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5}$

3 Determina los vértices, los focos, los extremos del eje conjugado, la excentricidad, el lado recto y las asíntotas de la hipérbola cuya ecuación es $x^2 - 8y^2 = 8$.

Solución

Al transformar la ecuación a su forma canónica se determina que:

$$\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{1} = 1$$

La ecuación representa una hipérbola horizontal de la forma: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$a^2 = 8$ y $b^2 = 1$, por tanto, $a = 2\sqrt{2}$ y $b = 1$, el valor de c se obtiene:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8+1} = \sqrt{9} = 3$$

Los elementos son:

Vértices: $V(\pm a, 0) = V(\pm 2\sqrt{2}, 0)$

Lado recto: $\overline{LR} = \frac{2b^2}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Focos: $F(\pm c, 0) = F(\pm 3, 0)$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

Extremos del eje conjugado: $B(0, \pm 1)$

Asíntota l_1: $y = \frac{b}{a}x$

$$x - 2\sqrt{2}y = 0$$

Asíntota l_2: $y = -\frac{b}{a}x$

$$x + 2\sqrt{2}y = 0$$

EJERCICIO 39

Determina los elementos de las siguientes hipérbolas:

1. $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{9} = 1$
2. $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$
3. $\frac{y^2}{8} - \frac{x^2}{5} = 1$
4. $\frac{y^2}{4a^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$
5. $4x^2 - 5y^2 - 20 = 0$
6. $16x^2 - 9y^2 - 144 = 0$
7. $4y^2 - x^2 - 4 = 0$
8. $5y^2 - 16x^2 + 400 = 0$
9. $4x^2 - 9y^2 + 144 = 0$
10. $x^2 - y^2 + 4 = 0$
11. $5x^2 - 6y^2 + 30 = 0$
12. $12x^2 - 5y^2 - 60 = 0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Dados sus elementos, obtener la ecuación

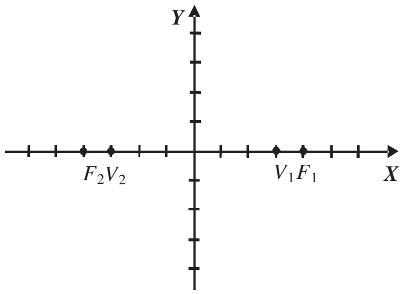
EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es la ecuación de la hipérbola cuyos vértices y focos son los puntos (± 3, 0) y (± 4, 0), respectivamente?

Solución

Se localizan los puntos en el plano cartesiano:



Y el resultado es una hipérbola horizontal con centro en el origen, semieje transverso $a = 3$ y semieje focal $c = 4$.

El valor de b es: $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$

Los valores de $a = 3$ y $b = \sqrt{7}$ se sustituyen en la ecuación $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

Y se obtiene la ecuación de la hipérbola:

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1 \quad \text{o} \quad 7x^2-9y^2-63=0$$

2 Determina la ecuación de la hipérbola con centro en el origen, uno de sus focos, el punto $\left(2\sqrt{3},\ 0\right)$ y el lado recto $2\sqrt{2}$.

Solución

De los elementos que se tienen resulta que:

$$c=2\sqrt{3} \quad \text{y} \quad \frac{2b^2}{a}=2\sqrt{2}$$

Se despeja b^2 de la fórmula del lado recto en términos de a:

$$b^2=\sqrt{2}a$$

Se sustituyen en la condición los valores de c y b^2, se simplifica y resuelve la ecuación.

$$c^2=a^2+b^2 \rightarrow \left(2\sqrt{3}\right)^2=a^2+\sqrt{2}a$$

$$12=a^2+\sqrt{2}a$$

$$a^2+\sqrt{2}\,a-12=0$$

$$(a+3\sqrt{2})(a-2\sqrt{2})=0$$

$$a=-3\sqrt{2} \text{ y } a=2\sqrt{2}$$

$a=2\sqrt{2}$, por tanto,

$$b^2=\sqrt{2}\left(2\sqrt{2}\right)=4 \rightarrow b=2$$

Se sustituye en la fórmula $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ y se obtiene:

$$\frac{x^2}{\left(2\sqrt{2}\right)^2}-\frac{y^2}{(2)^2}=1 \rightarrow \frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1 \rightarrow x^2-2y^2-8=0$$

3 Determina la ecuación de la hipérbola cuyos vértices son los puntos (0, 3), (0, – 3) y lado recto igual a $\frac{8}{3}$.

Solución

Se obtiene la distancia entre los vértices.

$$2a = \sqrt{(0-0)^2+(3+3)^2} = 6$$

$$a = \frac{6}{2}$$

$$a = 3$$

Si el lado recto es $\frac{8}{3}$ y $a = 3$, entonces:

$$\frac{2b^2}{3} = \frac{8}{3} \rightarrow b^2 = 4 \rightarrow b = 2$$

Los vértices son de la forma (0, – a) y (0, a), por tanto, la hipérbola es vertical y para determinar la ecuación se utiliza $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

Al sustituir se obtiene: $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{4}=1$

Y finalmente al transformar a su forma general se determina que:

$$4y^2 - 9x^2 - 36 = 0 \qquad \rightarrow \qquad 9x^2 - 4y^2 + 36 = 0$$

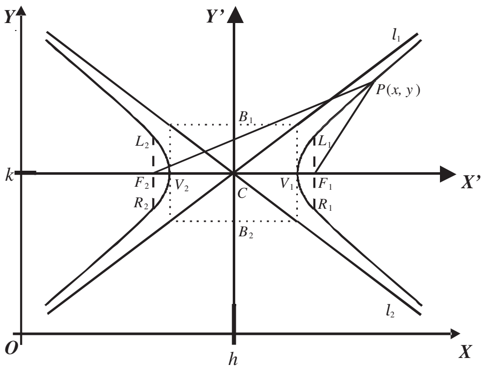
EJERCICIO **40**

Determina la ecuación de la hipérbola que cumpla con las siguientes características:

1. $V(0, \pm 3)$ y $F(0, \pm 4)$
2. $V(\pm 4, 0)$ y $F(\pm 5, 0)$
3. $V(0, \pm\sqrt{6})$ y $F(0, \pm\sqrt{10})$
4. $V(\pm 2\sqrt{2}, 0)$ y $F(\pm 2\sqrt{3}, 0)$
5. $V(\pm 1, 0)$ y $F(\pm\sqrt{5}, 0)$
6. $V(\pm 2\sqrt{2}, 0)$ y $F(\pm 2\sqrt{7}, 0)$
7. $V_1(3, 0)$, $V_2(-3, 0)$ y lado recto = $\frac{8}{3}$
8. $F_1\left(0, \sqrt{41}\right)$, $F_2\left(0, -\sqrt{41}\right)$ y lado recto = $\frac{25}{2}$
9. $V_1(6, 0)$, $V_2(-6, 0)$, excentricidad = $\frac{\sqrt{5}}{2}$
10. Centro en el origen, vértice y foco en los puntos $(2\sqrt{3}, 0)$ y (4, 0) respectivamente y eje conjugado sobre el eje de las ordenadas.
11. Centro en el origen, eje focal sobre el eje de las ordenadas y la longitud de su eje conjugado y lado recto $\sqrt{20}$ y $\frac{5}{3}\sqrt{6}$, respectivamente.
12. Centro en el origen, eje transverso igual a 4 y sobre el eje de las abscisas, y una de sus asíntotas es la ecuación $\sqrt{3}x-2y=0$
13. Centro en el origen, eje conjugado sobre el eje de las ordenadas, lado recto $2\sqrt{3}$ y excentricidad $\frac{\sqrt{6}}{2}$
14. Centro en el origen, eje transverso sobre el eje de las ordenadas, lado recto $\frac{5}{3}\sqrt{6}$ y excentricidad $\frac{\sqrt{66}}{6}$
15. Asíntotas las rectas $4x + 3y = 0$ y $4x - 3y = 0$, eje imaginario igual a 8 unidades (dos soluciones).
16. Extremos del eje conjugado $B_1(0, 1)$, $B_2(0, -1)$ y excentricidad $e = \frac{\sqrt{10}}{3}$
17. Eje focal sobre X, eje conjugado $\sqrt{20}$ y la longitud de cada lado recto $\frac{5\sqrt{6}}{3}$
18. Pasa por los puntos $\left(\frac{10}{3},4\right)$ y $\left(\frac{2}{3}\sqrt{13},-2\right)$, eje transverso sobre el eje X.
19. Pasa por los puntos $\left(6,2\sqrt{3}\right)$ y $\left(9,4\sqrt{2}\right)$, eje conjugado sobre el eje Y.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Ecuación de una hipérbola con centro en el punto (*h*, *k*)



Para una hipérbola horizontal con centro fuera del origen en el punto (h, k), se hace una traslación de los ejes *XY* al punto $C(h, k)$.

Sean $x' = x - h$, $y' = y - k$, la ecuación de la hipérbola en el nuevo sistema de coordenadas es:

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

Al sustituir x', y' en la ecuación se obtiene:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

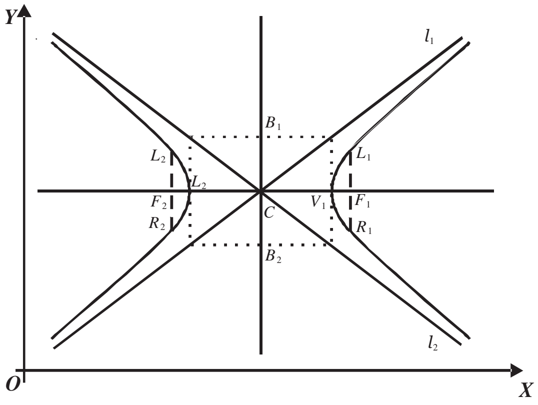
Del mismo modo se obtiene la ecuación de una hipérbola vertical con centro (h, k) fuera del origen:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Al simplificar se obtendrá una ecuación de la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, donde A y C varían en signo.

Elementos y ecuación

Hipérbola horizontal



Ecuación ordinaria

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Elementos

Vértices: $V(h \pm a, k)$

Focos: $F(h \pm c, k)$

Extremos del eje conjugado:

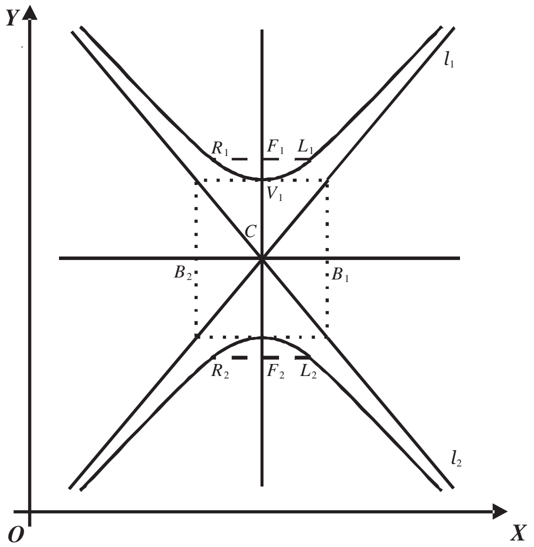
$$B(h, k \pm b)$$

Ecuaciones de las asíntotas:

$$l_1: y - k = \frac{b}{a}(x - h)$$

$$l_2: y - k = -\frac{b}{a}(x - h)$$

Hipérbola vertical



Ecuación ordinaria

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

Elementos

Vértices: $V\,(h,\,k\pm a)$

Focos: $F\,(h,\,k\pm c)$

Extremos del eje conjugado

$B\,(h\pm b,\,k)$

Ecuaciones de las asíntotas

$$l_1\text{: } y-k=\frac{a}{b}(x-h)$$

$$l_2\text{: } y-k=-\frac{a}{b}(x-h)$$

Para hipérbolas horizontales o verticales se tiene que:

Condición: $c^2 = a^2 + b^2$; $c > b$, $c > a$, excentricidad: $e=\frac{c}{a}$ $(e > 1)$, lado recto: $\overline{LR}=\frac{2b^2}{a}$

Ecuación general de la hipérbola:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Con A y C de signo contrario.

Dada la ecuación obtener sus elementos

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina los elementos de la hipérbola cuya ecuación es: $4y^2 - 9x^2 + 8y - 54x - 113 = 0$.

Solución

$4y^2 + 8y - 9x^2 - 54x = 113$

$4(y^2 + 2y) - 9(x^2 + 6x) = 113$ Se factorizan los coeficientes de los términos cuadráticos.

$4(y^2 + 2y + (1)^2) - 9(x^2 + 6x + (3)^2) = 113 + 4(1)^2 - 9(3)^2$ Se completa el trinomio cuadrado perfecto.

$4(y^2 + 2y + 1) - 9(x^2 + 6x + 9) = 113 + 4 - 81$

$4(y + 1)^2 - 9(x + 3)^2 = 36$ Se factoriza.

Se dividen ambos miembros entre 36 para obtener la ecuación en su forma ordinaria.

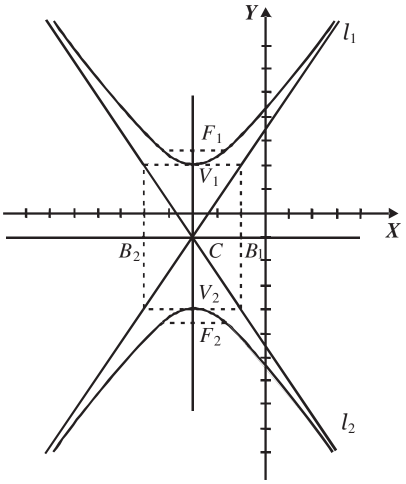
$$\frac{4(y+1)^2}{36} - \frac{9(x+3)^2}{36} = \frac{36}{36},\quad \frac{(y+1)^2}{9} - \frac{(x+3)^2}{4} = 1$$

Es una hipérbola vertical de elementos:

Centro $(-3, -1)$; $a = \sqrt{9} = 3$ y $b = \sqrt{4} = 2$

El valor de c es: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$.

Los elementos se obtienen al sustituir:



Vértices: $V(h, k \pm a)$

$V_1(-3, -1 + 3) = (-3, 2)$

$V_2(-3, -1 - 3) = (-3, -4)$

Focos: $F(h, k \pm c)$

$F_1\left(-3, -1+\sqrt{13}\right) = (-3, 2.6)$

$F_2\left(-3, -1-\sqrt{13}\right) = (-3, -4.6)$

Extremos del eje conjugado: $B(h \pm b, k)$

$B_1(-3+2, -1) = (-1, -1)$

$B_2(-3-2, -1) = (-5, -1)$

Lado recto: $\overline{LR} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(4)}{3} = \frac{8}{3}$

Eje transverso: $\overline{V_1V_2} = 2a = 2(3) = 6$

Eje focal: $\overline{F_1F_2} = 2c = 2\sqrt{13}$

Eje conjugado: $\overline{B_1B_2} = 2b = 2(2) = 4$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3}$

Asíntotas

$$l_1: y - k = \frac{a}{b}(x - h) \rightarrow l_1: y + 1 = \frac{3}{2}(x + 3) \rightarrow 3x - 2y + 7 = 0$$

$$l_2: y - k = -\frac{a}{b}(x - h) \rightarrow l_2: y + 1 = -\frac{3}{2}(x + 3) \rightarrow 3x + 2y + 11 = 0$$

2 Reduce la ecuación de la hipérbola a su forma ordinaria, determina sus elementos y grafica la curva.

$$5x^2 - 4y^2 - 10x + 24y - 51 = 0$$

Solución

$$5x^2 - 4y^2 - 10x + 24y - 51 = 0$$
$$5(x^2 - 2x) - 4(y^2 - 6y) = 51$$
$$5(x^2 - 2x + 1) - 4(y^2 - 6y + 9) = 51 + 5 - 36$$
$$5(x - 1)^2 - 4(y - 3)^2 = 20$$

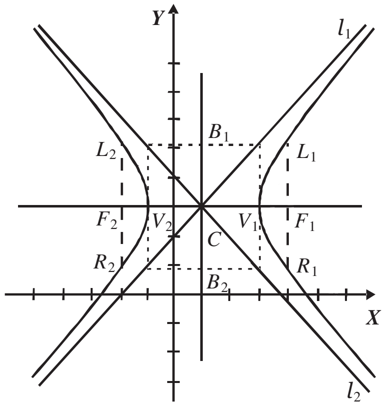
$$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{5} = 1 \quad \text{Ecuación en su forma ordinaria.}$$

El centro, el semieje transverso y el semieje conjugado son:

$$C\,(1, 3);\ a = \sqrt{4} = 2 \ \text{ y } b = \sqrt{5}$$

El valor de c es: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4+5} = \sqrt{9} = 3$.

Se obtienen los elementos sustituyendo los valores anteriores y posteriormente se grafica:



Vértices: $V\,(h \pm a,\ k)$

$V_1\,(3, 3)$ $V_2\,(-1, 3)$

Focos: $F\,(h \pm c,\ k)$

$F_1\,(4, 3)$ $F_2\,(-2, 3)$

Extremos del eje conjugado: $B\,(h,\ k \pm b)$

$B_1\,(1, 5.2)$ $B_2\,(1, 0.8)$

Lado recto: $\overline{LR} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(5)}{2} = 5$

Eje transverso: $\overline{V_1V_2} = 2a = 4$

Eje focal: $\overline{F_1F_2} = 2c = 6$

Eje conjugado: $\overline{B_1B_2} = 2b = 2\sqrt{5}$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$

Asíntotas

$$l_1\!: y - 3 = \frac{\sqrt{5}}{2}(x - 1) \rightarrow \sqrt{5}x - 2y + \left(6 - \sqrt{5}\right) = 0$$

$$l_2\!: y - 3 = -\frac{\sqrt{5}}{2}(x - 1) \rightarrow \sqrt{5}x + 2y - \left(6 + \sqrt{5}\right) = 0$$

EJERCICIO 41

Determina los elementos de las siguientes hipérbolas:

1. $\frac{(x+3)^2}{25}-\frac{(y-4)^2}{9}=1$
2. $\frac{y^2}{4}-(x+1)^2=1$
3. $\frac{x^2}{9}-\frac{(y+2)^2}{4}=1$
4. $x^2-4y^2-2x+16y-7=0$
5. $9x^2-4y^2+18x-24y+9=0$
6. $9x^2-16y^2+36x+32y-124=0$
7. $4x^2-9y^2-4x+18y-44=0$
8. $4x^2-y^2+24x+40=0$
9. $x^2-y^2-x+y+4=0$
10. $4x^2-y^2-4y-40=0$
11. $x^2-y^2-6x-4y+4=0$
12. $9x^2-y^2-36x-4y+41=0$
13. $4x^2-9y^2-4x+6y-36=0$
14. $x^2-2y^2-8x+12y-10=0$
15. $6x^2-5y^2+12x-30y-9=0$
16. $3x^2-4y^2+24x-8y+32=0$
17. $x^2-2y^2-4x+20y-58=0$
18. $x^2-y^2+14x-2y+46=0$
19. $2x^2-y^2+28x-2y+95=0$
20. $4x^2-3y^2+8x+30y-83=0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Dados sus elementos obtener la ecuación

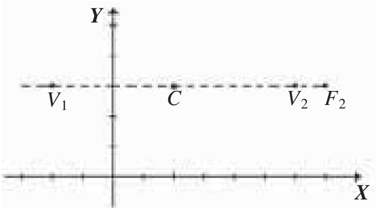
EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la ecuación general de la hipérbola cuyos vértices son los puntos (–2, 3) y (6, 3), un foco se localiza en el punto (7, 3).

Solución

Se localizan los puntos en el plano:



Se obtiene el centro $C(2, 3)$, el valor del semieje transverso a es la distancia de cualquier vértice al centro y el valor del semieje focal c es la distancia del foco al centro, es decir:

$$a = 4 \text{ y } c = 5$$

Para determinar b se sustituyen los valores en la condición:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(5)^2 - (4)^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$$

Es una hipérbola horizontal, por tanto, la ecuación es del tipo: $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$.

Se sustituyen $C(2, 3)$, $a = 4$ y $b = 3$:

$$\frac{(x-2)^2}{(4)^2} - \frac{(y-3)^2}{(3)^2} = 1 \rightarrow \frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y-3)^2}{9} = 1 \text{ Ecuación en su forma ordinaria.}$$

Se obtiene la ecuación en su forma general:

Se multiplica la ecuación por 144, $144\left[\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y-3)^2}{9} = 1\right]$

Se desarrollan los binomios, $9(x-2)^2 - 16(y-3)^2 = 144$

Se multiplica y simplifica, $9(x^2 - 4x + 4) - 16(y^2 - 6y + 9) = 144$

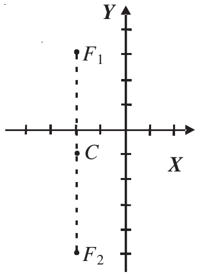
$$9x^2 - 36x + 36 - 16y^2 + 96y - 144 - 144 = 0$$

La ecuación general es: $9x^2 - 16y^2 - 36x + 96y - 252 = 0$

2 Determina la ecuación general de la hipérbola cuyos focos son los puntos (–2, 3), (–2, –5) y su lado recto $\frac{14}{3}$.

Solución

Se grafican en el plano cartesiano los elementos conocidos:



Se obtienen las coordenadas del centro y el valor del semieje focal c.

$$C(-2, -1) \text{ y } c = 4$$

El lado recto es $\overline{LR} = \frac{2b^2}{a} = \frac{14}{3}$, se despeja b^2:

$$\frac{2b^2}{a} = \frac{14}{3} \rightarrow b^2 = \frac{7}{3}a$$

Se sustituyen $c = 4$ y $b^2 = \frac{7}{3}a$ en la condición y se resuelve la ecuación.

$$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow (4)^2 = a^2 + \frac{7}{3}a$$

$$16 = a^2 + \frac{7}{3}a$$

$$0 = 3a^2 + 7a - 48$$

$$(3a + 16)(a - 3) = 0$$

De la ecuación $a = 3$, el valor del semieje conjugado es:

$$b^2 = \frac{7}{3}a \rightarrow b^2 = \frac{7}{3}(3) = 7 \rightarrow b = \sqrt{7}$$

La hipérbola es vertical, la ecuación se obtiene al sustituir las coordenadas del centro y el valor de a y el valor de b en: $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

Forma ordinaria: $\frac{(y+1)^2}{9} - \frac{(x+2)^2}{7} = 1$

Forma general: $7y^2 - 9x^2 + 14y - 36x - 92 = 0 \rightarrow 9x^2 - 7y^2 + 36x - 14y + 92 = 0$

EJERCICIO 42

Determina las ecuaciones de las hipérbolas que cumplan con las siguientes condiciones:

1. $F_1(5, 1)$, $F_2(-5, 1)$, $V_1(3, 1)$, $V_2(-3, 1)$
2. $F_1(-4, 5)$, $F_2(-4, -7)$, $V_1(-4, 4)$, $V_2(-4, -6)$
3. $F_1(7, -2)$, $F_2(-3, -2)$, $V_1(6, -2)$, $V_2(-2, -2)$
4. $F_1(1, 6)$, $F_2(1, 0)$, $V_1(1, 5)$, $V_2(1, 1)$
5. $F_1(8, 2)$, $F_2(-2, 2)$ y excentricidad $e = \frac{5}{4}$
6. $F_1(-3, 3)$, $F_2(-9, 3)$ y $LR = 5$
7. $F_1(-2, 3)$, $F_2(6, 3)$ y $LR = 12$
8. Extremos del eje conjugado, los puntos $(-1+\sqrt{7}, 3)$ y $(-1-\sqrt{7}, 3)$, $e = \frac{4}{3}$
9. Eje transverso paralelo al eje de las abscisas, excentricidad igual a $\frac{\sqrt{6}}{2}$, vértices, los puntos $(4-2\sqrt{2}, 3)$ y $(4+2\sqrt{2}, 3)$
10. Longitud del lado recto igual a $\frac{5}{3}\sqrt{6}$ y extremos del eje conjugado, los puntos $(-2+\sqrt{5}, -3)$ y $(-2-\sqrt{5}, -3)$
11. Longitud del lado recto 3 y focos en los puntos $(-4+\sqrt{7}, -1)$ y $(-4-\sqrt{7}, -1)$
12. Centro en (1, 3), eje transverso paralelo al eje X, excentricidad $e = \frac{5}{4}$ y $LR = \frac{9}{2}$
13. Los extremos de un lado recto son los puntos $\left(-1-\frac{4\sqrt{5}}{5}, 4\right)$ y $\left(-1+\frac{4\sqrt{5}}{5}, 4\right)$ las ecuaciones de sus asíntotas, las rectas $\sqrt{5}x+2y+\sqrt{5}-2=0$ y $\sqrt{5}x-2y+\sqrt{5}+2=0$
14. Eje transverso paralelo al eje X es igual a 4, excentricidad $e = \frac{\sqrt{13}}{2}$ y pasa por los puntos $(-4, 1)$ y $\left(1, 1+\frac{3}{2}\sqrt{5}\right)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Casos especiales

Existen ecuaciones que no precisamente representan una hipérbola y que sólo son un par de rectas concurrentes.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina si la ecuación $x^2 - 4y^2 - 2x + 1 = 0$ representa una hipérbola o dos rectas concurrentes.

Solución

Al transformar la ecuación a su forma ordinaria se determina que:

$$x^2 - 4y^2 - 2x + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 2x - 4y^2 = -1 \quad \rightarrow \quad (x^2 - 2x + 1) - 4y^2 = -1 + 1$$

$$(x - 1)^2 - 4(y - 0)^2 = 0$$

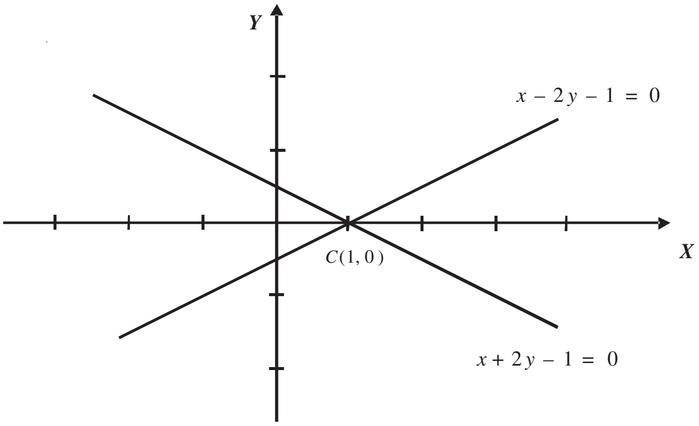
La ecuación es una diferencia de cuadrados, la cual se factoriza,

$$[(x - 1) + 2(y - 0)]\,[(x - 1) - 2(y - 0)] = 0 \quad \rightarrow \quad [x - 1 + 2y]\,[x - 1 - 2y] = 0$$

Se igualan con cero cada uno de los factores y se obtienen las siguientes rectas:

$$x + 2y - 1 = 0, \qquad x - 2y - 1 = 0$$

La representación gráfica es:



2 ¿Cuál es el valor de K para que la ecuación $x^2 - 4y^2 + 4x + 24y + K = 0$ represente un par de rectas concurrentes?

Solución

Se transforma la ecuación a su forma ordinaria:

$$x^2 - 4y^2 + 4x + 24y + K = 0 \rightarrow x^2 - 4y^2 + 4x + 24y = -K$$
$$(x^2 + 4x) - 4(y^2 - 6y) = -K$$
$$(x^2 + 4x + 4) - 4(y^2 - 6y + 9) = -K + 4 - 36$$
$$(x + 2)^2 - 4(y - 3)^2 = -K - 32$$

Para que la ecuación represente dos rectas concurrentes, el segundo miembro de la ecuación debe ser cero:

$$-K - 32 = 0$$
$$-K = 32$$
$$K = -32$$

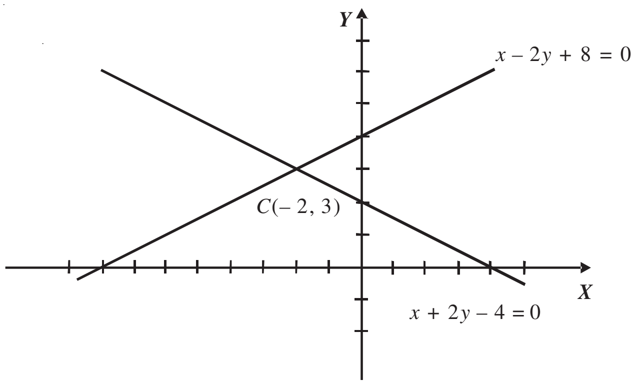
Se sustituye el valor de $K = -32$ en la ecuación $(x + 2)^2 - 4(y - 3)^2 = -K - 32$,

$$(x + 2)^2 - 4(y - 3)^2 = 0$$
$$[(x + 2) + 2(y - 3)]\,[(x + 2) - 2(y - 3)] = 0$$
$$(x + 2y - 4)\,(x - 2y + 8) = 0$$

Las ecuaciones de las rectas cuando $K = -32$, son:

$$x + 2y - 4 = 0$$
$$x - 2y + 8 = 0$$

Gráfica:



EJERCICIO 43

Determina el valor de K en las siguientes ecuaciones para que representen un par de rectas concurrentes.

1. $9x^2 - 4y^2 - 18x + 8y + K = 0$
2. $2x^2 - y^2 + 4x + 4y + K = 0$
3. $9x^2 + 54x - y^2 + 4y + K = 0$
4. $3x^2 - 2y^2 - 2x + 2y + K = 0$
5. $x^2 - 12y^2 - 2x + K = 0$
6. $4x^2 - 3y^2 - 8x + 6y + K = 0$
7. $25x^2 - 4y^2 - 100x + 24y + K = 0$
8. $y^2 - 4x^2 + 24x - 2y + K = 0$
9. $x^2 - y^2 - 2x - 2y + K = 0$
10. $9y^2 - 4x^2 + 16x - 18y + K = 0$
11. $x^2 - 4y^2 - 4x - 24y + K = 0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Ecuación de una recta tangente a una hipérbola en un punto cualquiera

Se tiene una hipérbola con vértice en el origen y una recta tangente en el punto (x_0, y_0), la ecuación de la recta está dada por:

$$\text{Horizontal: } \frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$$

$$\text{Vertical: } \frac{y_0y}{a^2}-\frac{x_0x}{b^2}=1$$

Se tiene una hipérbola con centro (h, k) fuera del origen y una recta tangente en el punto (x_0, y_0), la ecuación de la recta está dada por:

$$\text{Horizontal: } \frac{(x_0-h)(x-h)}{a^2}-\frac{(y_0-k)(y-k)}{b^2}=1$$

$$\text{Vertical: } \frac{(y_0-k)(y-k)}{a^2}-\frac{(x_0-h)(x-h)}{b^2}=1$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la ecuación de la recta tangente a la elipse $7x^2 - 9y^2 - 63 = 0$, en el punto $\left(4, \frac{7}{3}\right)$

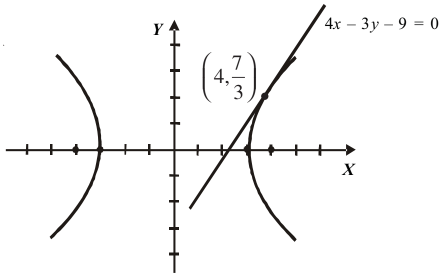
Solución

Se transforma la ecuación a su forma ordinaria:

$$7x^2 - 9y^2 - 63 = 0 \;\rightarrow\; 7x^2 - 9y^2 = 63 \rightarrow \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1 \text{ Es una hipérbola horizontal.}$$

Entonces $a^2 = 9$, $b^2 = 7$, se sustituyen estos valores y el punto en la fórmula: $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$

$$\frac{(4)x}{9}-\frac{\left(\frac{7}{3}\right)y}{7}=1 \rightarrow \frac{4x}{9}-\frac{7y}{21}-1=0 \;\rightarrow\; \frac{4x}{9}-\frac{y}{3}-1=0 \;\rightarrow\; 4x-3y-9=0$$



Por consiguiente, la ecuación de la recta tangente es: $4x - 3y - 9 = 0$.

2 Determina la ecuación de la recta tangente a la elipse $\frac{(x-2)^2}{16}-\frac{(y-3)^2}{9}=1$, en el punto $\left(7, \frac{21}{4}\right)$.

Solución

De la ecuación $\frac{(x-2)^2}{16}-\frac{(y-3)^2}{9}=1$, se obtiene que $C(h, k) = C(2, 3)$, $a^2 = 16$ y $b^2 = 9$, se sustituyen estos datos y el punto $(x_0, y_0) = \left(7, \frac{21}{4}\right)$ en: $\frac{(x_0-h)(x-h)}{a^2}-\frac{(y_0-k)(y-k)}{b^2}=1$

$$\frac{(7-2)(x-2)}{16}-\frac{\left(\frac{21}{4}-3\right)(y-3)}{9}=1 \rightarrow \frac{5(x-2)}{16}-\frac{y-3}{4}=1 \;\rightarrow 5x-4y-14=0$$

Por consiguiente, la ecuación de la recta tangente a la hipérbola es: $5x - 4y - 14 = 0$.

EJERCICIO 44

Resuelve lo siguiente:

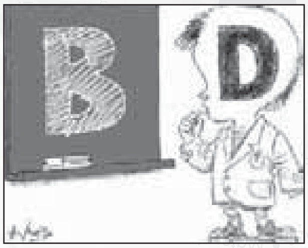
1. Determina la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$, en el punto $\left(-5, -\frac{9}{4}\right)$
2. Obtén la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $25x^2 - 9y^2 + 225 = 0$, en el punto $\left(\frac{9}{5}, -\sqrt{34}\right)$
3. Determina la ecuación de la recta tangente a la hipérbola cuya ecuación es: $9x^2 - 16y^2 - 36x + 160y - 508 = 0$ en el punto $\left(-3, \frac{11}{4}\right)$
4. Obtén la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $5x^2 - y^2 - 4x - 2y + 24 = 0$, en el punto $(0, -6)$
5. Determina la ecuación de la recta tangente a la hipérbola cuya ecuación es: $x^2 - 17y^2 + 4x + 102y - 166 = 0$, en el punto $(-19, 7)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Capítulo 11

Ecuación general de cónicas

Estrabismo o DISLEXIA



Estrabismo o dislexia
Estudio de los ejes de Fick.

Estrabismo es toda situación en que los ejes visuales no se cruzan sobre el objeto que se mira.

El ojo realiza movimientos de rotación y de traslación, pero para su tratamiento sólo se estudian los de rotación, ya que los de traslación son despreciables, el estudio se basa únicamente en los ejes de Fick (son los ejes de rotación).

Los ejes que pueden pasar por el centro de rotación (uno para cada movimiento), en el que el eje *Y* anteroposterior coincida con el eje visual y los ejes *X* y *Z* estén contenidos en un plano perpendicular al eje *Y* en el centro de rotación.

Rotación de ejes

En el sistema de ejes coordenados cuando los ejes rotan un ángulo α, manteniendo fijo el origen, los puntos $P(x, y)$ se transforman en $P(x', y')$, a esta transformación se le llama *rotación de ejes*. Los puntos están relacionados con las siguientes ecuaciones:

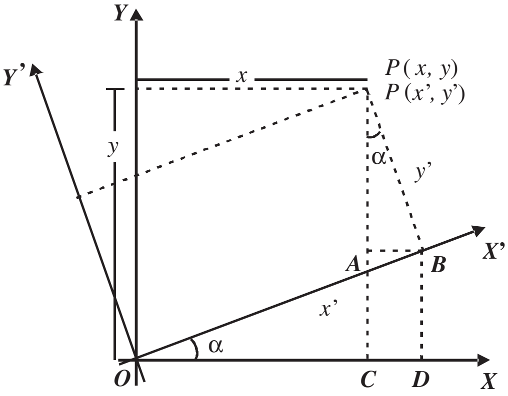
$$x' = x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha$$
$$y' = y \cos \alpha - x \operatorname{sen} \alpha$$

En la figura,

$$x = \overline{OD} - \overline{CD}\ ;\ y = \overline{AP} + \overline{AC}$$

Pero $\overline{CD} = \overline{AB}$ y $\overline{AC} = \overline{BD}$, entonces

$$x = \overline{OD} - \overline{AB}\ ;\ y = \overline{AP} + \overline{BD}$$



En el triángulo PAB

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{AB}}{y'}\ ;\ \cos \alpha = \frac{\overline{AP}}{y'}$$

$$\overline{AB} = y' \operatorname{sen} \alpha,\ \ \overline{AP} = y' \cos \alpha$$

En el triángulo ODB

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{BD}}{x'}\ ;\ \cos \alpha = \frac{\overline{OD}}{x'}$$

$$\overline{BD} = x' \operatorname{sen} \alpha,\ \ \overline{OD} = x' \cos \alpha$$

Luego, al sustituir en $x = \overline{OD} - \overline{AB}$; $y = \overline{AP} + \overline{BD}$

$$x = x' \cos \alpha - y' \operatorname{sen} \alpha;$$

$$y = y' \cos \alpha + x' \operatorname{sen} \alpha$$

Al resolver el sistema se obtiene:

$$x' = x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha$$
$$y' = y \cos \alpha - x \operatorname{sen} \alpha$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Un sistema de coordenadas se rota 45°. Determina las coordenadas del punto $A(-1, 2)$ referido al nuevo sistema coordenado $X'Y'$.

Solución

Para determinar las nuevas coordenadas (x', y') se utiliza: $x' = x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha$; $y' = y \cos \alpha - x \operatorname{sen} \alpha$.

Como el ángulo a rotar es de 45°, se precisa que:

$$\operatorname{sen} 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ y } \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Al sustituir en las fórmulas, se determina el punto en el nuevo sistema coordenado $X'Y'$.

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1) + \frac{1}{\sqrt{2}}(2) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} \qquad y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(2) - \frac{1}{\sqrt{2}}(-1) = \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad y' = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

De aquí se deduce que las coordenadas del punto $A(-1, 2)$ en el nuevo sistema de coordenadas son: $A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$.

Ángulo de rotación

Para determinar el ángulo de rotación, el cual elimina el termino xy, se sustituyen las ecuaciones:

$$x = x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha\ ;\ y = x'\operatorname{sen}\alpha + y'\cos\alpha$$

en la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, como a continuación se ejemplifica:

EJEMPLOS

1 Determina el ángulo de rotación de los ejes necesario para eliminar el término xy de la ecuación.

$$7x^2 - 6\sqrt{3}\,xy + 13y^2 = 16$$

Solución

Se sustituyen las ecuaciones de rotación:

$$x = x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha;\ y = x'\operatorname{sen}\alpha + y'\cos\alpha$$

$$7(x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha)^2 - 6\sqrt{3}\,(x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha)(x'\operatorname{sen}\alpha + y'\cos\alpha) + 13(x'\operatorname{sen}\alpha + y'\cos\alpha)^2 = 16$$

Se desarrollan y se reducen los términos semejantes:

$$(7\cos^2\alpha - 6\sqrt{3}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + 13\operatorname{sen}^2\alpha)x'^2 + [12\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - 6\sqrt{3}\,(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha)]\,x'y'$$

$$+ (7\operatorname{sen}^2\alpha + 6\sqrt{3}\,\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + 13\cos^2\alpha)y'^2 = 16$$

Para eliminar el término en $x'y'$, se iguala con cero el coeficiente de dicho término y se despeja el ángulo α.

$$12\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - 6\sqrt{3}\,(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha) = 0 \rightarrow 6\operatorname{sen}2\alpha - 6\sqrt{3}\cos 2\alpha = 0$$

y al dividir entre $\cos 2\alpha$, se obtiene:

$$\tan 2\alpha = \sqrt{3} \rightarrow 2\alpha = 60°$$

Finalmente, el ángulo $\alpha = 30°$.

En el ejemplo anterior se observa que determinar el ángulo de rotación de los ejes es un tanto laborioso, no obstante, una forma práctica es tomar los coeficientes de los términos cuadráticos y el término xy de la ecuación general de segundo grado:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Y sustituirlos en la ecuación:

$$\tan 2\alpha = \frac{B}{A - C}$$

2 Determina el ángulo de rotación de los ejes necesario para eliminar el término xy de la ecuación.

$$13x^2 + 2\sqrt{3}\,xy + 15y^2 = 36$$

Solución

Los valores de $A = 13$, $B = 2\sqrt{3}$ y $C = 15$ se sustituyen en la fórmula:

$$\tan 2\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{15 - 13} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \rightarrow \tan 2\alpha = \sqrt{3} \rightarrow 2\alpha = 60°$$

Por consiguiente, el ángulo $\alpha = 30°$.

Transformación de la ecuación general de segundo grado

Para transformar la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, a otra que carezca del término xy conociendo el ángulo de rotación α, se sustituye dicho ángulo en las fórmulas:

$$x = x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha; \; y = x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha$$

y éstas a su vez en la ecuación, desarrollando y simplificando los términos resultantes.

Ejemplo

Transforma la ecuación $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 4y + 3 = 0$, cuando se giran los ejes un ángulo de 45°.

Solución

Debido a que el ángulo de rotación es de 45°, se determinan las ecuaciones de rotación.

$$x = x' \cos 45° - y' \operatorname{sen} 45° = \frac{x'-y'}{\sqrt{2}}; \; y = x' \operatorname{sen} 45° + y' \cos 45° = \frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$$

Se sustituyen estos valores en la ecuación dada, el resultado es:

$$\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right) - 4\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right) + 3 = 0$$

Al desarrollar y simplificar se obtiene al final:

$$2y'^2 - \sqrt{2}\,x' - 3\sqrt{2}\,y' + 3 = 0$$

EJERCICIO **45**

Rota las siguientes curvas a los ángulos indicados.

1. $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y = 0; \alpha = 45°$
2. $13x^2 + 2\sqrt{3}xy + 15y^2 - 48 = 0; \alpha = 150°$
3. $x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 - 8 = 0; \alpha = 120°$
4. $3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 - 2x + 2\sqrt{3}y = 0; \alpha = 30°$
5. $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 8\sqrt{2}x - 6 = 0; \alpha = 135°$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Transformación aplicando las identidades trigonométricas

Para transformar la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ a otra que carezca de término xy se utilizan las siguientes fórmulas:

$$\tan 2\alpha = \frac{B}{A-C}$$

Y las identidades trigonométricas

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{\tan^2 2\alpha + 1}};\ \operatorname{sen} \alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}};\ \cos \alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$$

Como se muestra a continuación:

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Mediante una rotación de ejes elimina el término xy de la ecuación $3x^2 + 3xy - y^2 = 9$.

Solución

Se determinan los valores $A = 3$, $B = 3$ y $C = -1$, para determinar $\tan 2\alpha$ y el resultado se evalúa en la fórmula de $\cos 2\alpha$:

$$\tan 2\alpha = \frac{B}{A-C} = \frac{3}{3-(-1)} = \frac{3}{4} \rightarrow \cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{\tan^2 2\alpha + 1}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1}} = \frac{4}{5}$$

Luego, con la aplicación de las siguientes fórmulas se encuentran los valores de seno y coseno:

$$\operatorname{sen} \alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}};\ \cos \alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1+\left(\frac{4}{5}\right)}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

Las ecuaciones de rotación son:

$$x = x'\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) - y'\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \frac{3x'-y'}{\sqrt{10}};\ y = x'\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) + y'\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \frac{x'+3y'}{\sqrt{10}}$$

Estas ecuaciones se sustituyen en la ecuación de la cónica.

$$3\left(\frac{3x'-y'}{\sqrt{10}}\right)^2 + 3\left(\frac{3x'-y'}{\sqrt{10}}\right)\left(\frac{x'+3y'}{\sqrt{10}}\right) - \left(\frac{x'+3y'}{\sqrt{10}}\right)^2 = 9$$

Se desarrollan las operaciones y se simplifica para obtener finalmente la ecuación.

$$7x'^2 - 3y'^2 = 18$$

2 Mediante una rotación de ejes elimina el término xy, e identifica la naturaleza de la curva de ecuación:

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 = 8$$

Solución

Al comparar con la ecuación general se determina que $A = 3$, $B = -2$ y $C = 3$, como $A = C$, entonces el ángulo de rotación es de 45°; por tanto, las ecuaciones son:

$$x = x' \cos 45° - y' \operatorname{sen} 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' = \frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}$$

$$y = x' \operatorname{sen} 45° + y' \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' = \frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}$$

Se sustituyen en la ecuación $3x^2 - 2xy + 3y^2 = 8$,

$$3\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}\right) + 3\left(\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}\right)^2 = 8$$

Ahora, al desarrollar y simplificar, se encuentra la ecuación de la curva sin término en xy.

$$3\left(\frac{x'^2}{2} - 2\left(\frac{x'y'}{2}\right) + \frac{y'^2}{2}\right) - 2\left(\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2}\right) + 3\left(\frac{x'^2}{2} + 2\left(\frac{x'y'}{2}\right) + \frac{y'^2}{2}\right) = 8$$

$$3\left(\frac{x'^2}{2} - x'y' + \frac{y'^2}{2}\right) - 2\left(\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2}\right) + 3\left(\frac{x'^2}{2} + x'y' + \frac{y'^2}{2}\right) = 8$$

$$\frac{3x'^2}{2} - 3x'y' + \frac{3y'^2}{2} - x'^2 + y'^2 + \frac{3x'^2}{2} + 3x'y' + \frac{3y'^2}{2} = 8$$

$$\frac{6x'^2}{2} + \frac{6y'^2}{2} - x'^2 + y'^2 = 8$$

$$2x'^2 + 4y'^2 = 8$$

Finalmente, la ecuación es: $x'^2 + 2y'^2 = 4$, la cual representa una elipse.

EJERCICIO **46**

Transforma las siguientes ecuaciones a otra que no contenga el término xy.

1. $2xy = 1$
2. $x^2 - 2xy + y^2 - 8\sqrt{2}\,x - 8\sqrt{2}\,y = 0$
3. $7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 - 8\sqrt{3}\,x + 16x - 8y - 16\sqrt{3}y + 16 = 0$
4. $x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + 6x - 2\sqrt{3}y = 0$
5. $x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 - 4 = 0$
6. $13x^2 - 10xy + 13y^2 + 16x + 16y - 56 = 0$
7. $x^2 + xy + y^2 + 4x - 6y + 5 = 0$
8. $5x^2 + 4xy + 2y^2 - 20x + 10y = 0$
9. $x^2 - 2xy + y^2 - 20x + 10y = 0$
10. $x^2 + 4xy + y^2 - 24x - 24y + 104 = 0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Transformación de la ecuación de una cónica por rotación y traslación de los ejes

Para analizar geométricamente una ecuación de la forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

sin muchos problemas, ésta se reduce con una rotación y traslación de ejes.

Al realizar la rotación de ejes, ésta orienta los ejes coordenados en la dirección de las cónicas elipse e hipérbola, y la traslación de ejes lleva al nuevo origen al centro de las mismas. En el caso de la parábola, al rotar los ejes, uno de ellos es paralelo al eje focal y la traslación lleva al nuevo origen al vértice.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Mediante una rotación y traslación de ejes, reduce y grafica la ecuación:

$$52x^2 + 72xy + 73y^2 + 160x + 130y + 25 = 0$$

Solución

Se realiza la rotación de ejes.

Se aplican las fórmulas para encontrar el valor de *sen* α y *cos* α, entonces,

$$\tan 2\alpha = \frac{B}{A-C} = \frac{72}{52-73} = \frac{72}{-21} = \frac{24}{-7} = -\frac{24}{7}$$

Luego $2\alpha \in$ II cuadrante

$$\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{\tan^2 2\alpha + 1}} = -\frac{1}{\sqrt{\left(-\frac{24}{7}\right)^2 + 1}} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{576}{49}+1}} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{625}{49}}} = -\frac{1}{\frac{25}{7}} = -\frac{7}{25}$$

Por tanto,

$$\cos 2\alpha = -\frac{7}{25}$$

Luego, con el valor de *cos* 2α se determinan los valores de *sen* α y *cos* α:

$$\operatorname{sen} \alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-\left(-\frac{7}{25}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{7}{25}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{32}{25}}{2}} = \sqrt{\frac{32}{50}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1+\left(-\frac{7}{25}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{7}{25}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{18}{25}}{2}} = \sqrt{\frac{18}{50}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

Por consiguiente, las ecuaciones de transformación para rotar son:

$$x = x' \cos \alpha - y' \operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y' = \frac{3x' - 4y'}{5}$$

$$y = x' \operatorname{sen} \alpha + y' \cos \alpha = \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y' = \frac{4x' + 3y'}{5}$$

Luego, al sustituir en la ecuación:

$$52x^2 + 72xy + 73y^2 + 160x + 130y + 25 = 0$$

Se determina que:

$$52\left(\frac{3x'-4y'}{5}\right)^2+72\left(\frac{3x'-4y'}{5}\right)\left(\frac{4x'+3y'}{5}\right)+73\left(\frac{4x'+3y'}{5}\right)^2+160\left(\frac{3x'-4y'}{5}\right)+130\left(\frac{4x'+3y'}{5}\right)+25=0$$

La cual, al simplificarla resulta:

$$4x'^2+y'^2+8x'-2y'+1=0$$

Luego se realiza la traslación de ejes.

Se sustituyen,

$$x'=x''+h,\ y'=y''+k$$

En la ecuación $4x'^2+y'^2+8x'-2y'+1=0$

$$4(x''+h)^2+(y''+k)^2+8(x''+h)-2(y''+k)+1=0$$

Se desarrollan las operaciones

$$4(x''^2+2x''h+h^2)+(y''^2+2y''k+k^2)+8(x''+h)-2(y''+k)+1=0$$

$$4x''^2+8x''h+4h^2+y''^2+2y''k+k^2+8x''+8h-2y''-2k+1=0$$

$$4x''^2+y''^2+8x''h+8x''+2y''k-2y''+4h^2+k^2+8h-2k+1=0$$

$$4x''^2+y''^2+(8h+8)x''+(2k-2)y''+(4h^2+k^2+8h-2k+1)=0$$

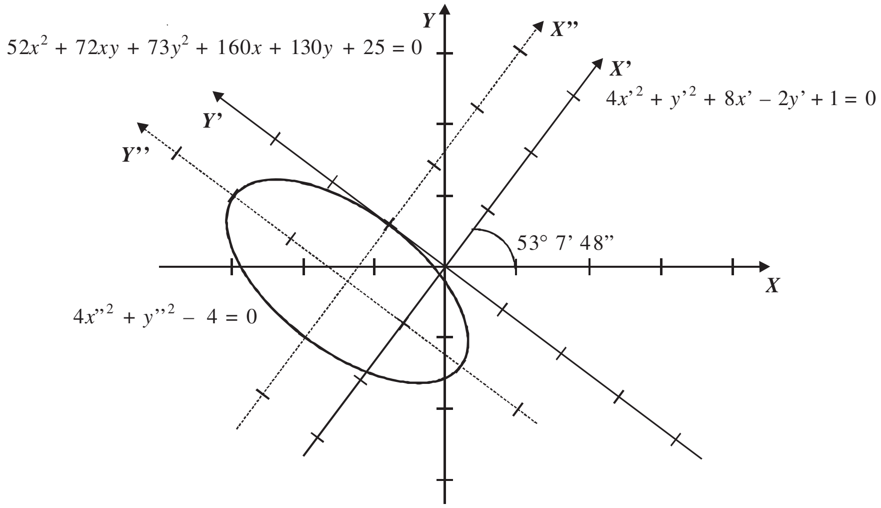
$$8h+8=0\rightarrow h=-1$$

$$2k-2=0\rightarrow k=1$$

Por tanto, el nuevo origen es el punto $O''(-1, 1)$

Al sustituir los valores de h y k, la ecuación se reduce a:

$$4x''^2+y''^2-4=0$$



EJERCICIO 47

Mediante una transformación de coordenadas, simplifica las siguientes ecuaciones.

1. $x^2 - 2xy + y^2 - 8\sqrt{2}x = 0$
2. $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16\sqrt{2}x - 32\sqrt{2}y + 96 = 0$
3. $13x^2 - 10xy + 13y^2 + 44\sqrt{2}x - 28\sqrt{2}y + 8 = 0$
4. $5x^2 - 26xy + 5y^2 - 70\sqrt{2}y + 38\sqrt{2}x + 202 = 0$
5. $x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 - 8\left(1+2\sqrt{3}\right)x + 8\left(2-\sqrt{3}\right)y - 112 = 0$
6. $3x^2 - 2\sqrt{3}xy + y^2 + 12\left(1+\sqrt{3}\right)x - 12\left(1-\sqrt{3}\right)y + 12 = 0$
7. $x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 + 8\sqrt{3}x + 8y + 50 = 0$
8. $x^2 + 2xy + y^2 + 10\sqrt{2}x - 14\sqrt{2}y + 2 = 0$
9. $7x^2 + 6\sqrt{3}xy + 13y^2 + 4\left(8+\sqrt{3}\right)x + 4\left(8\sqrt{3}-1\right)y + 52 = 0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Identificación de una cónica

Una forma de conocer la naturaleza de la ecuación:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

es realizar una rotación y traslación de ejes, pero esta transformación es muy laboriosa.

Otra forma de identificar su naturaleza, sin tener que realizar la transformación es sustituir los coeficientes de la ecuación general en la expresión:

$$I = B^2 - 4AC$$

Que recibe el nombre de *invariante o indicador*.

Caso I*:* si se elige un ángulo α de modo que $B = 0$, entonces:

- Si A o $C = 0$ la ecuación representa una parábola.
- Si $A \neq C$ y de signos iguales la ecuación representa una elipse.
- Si A y C tienen signos contrarios la ecuación representa una hipérbola.

Caso II*:* si $B \neq 0$ la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, representa una cónica no degenerada si:

- $B^2 - 4AC = 0$ la ecuación representa una parábola.
- $B^2 - 4AC < 0$ la ecuación representa una elipse.
- $B^2 - 4AC > 0$ la ecuación representa una hipérbola.

Una curva degenerada es aquella que representa:

- Dos rectas concurrentes.
- Un punto.
- Dos rectas paralelas.
- Una sola recta.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la naturaleza de la cónica $x^2 - 4xy + 3y^2 + x - y + 4 = 0$.

Solución

De la ecuación se obtiene:

$$A = 1,\ B = -4 \text{ y } C = 3$$

Al sustituir en el indicador:

$$I = B^2 - 4AC$$

$$I = (-4)^2 - 4(1)(3) = 16 - 12 = 4$$

De acuerdo con el indicador $I > 0$, por tanto, la curva representa una hipérbola.

2 ¿Qué cónica representa la curva $x^2 + 2xy + y^2 + 4x + y - 20 = 0$?

Solución

De la ecuación se obtiene:

$$A = 1,\ B = 2 \text{ y } C = 1$$

Al sustituir en el indicador

$$I = (2)^2 - 4(1)(1) = 4 - 4 = 0$$

De acuerdo con el indicador $I = 0$, la ecuación representa una parábola.

3 ¿Cuál es la naturaleza de la cónica $2x^2 - 7xy + 8y^2 - 5x - 10 = 0$?

Solución

De la ecuación se determina que:

$$A = 2,\ B = -7 \text{ y } C = 8$$

Al sustituir en el indicador,

$$I = (-7)^2 - 4(2)(8) = 49 - 64 = -15$$

De acuerdo con el indicador $I < 0$, la ecuación corresponde a una elipse.

EJERCICIO **48**

Determina la naturaleza de las siguientes cónicas no degeneradas.

1. $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y = 0$
2. $13x^2 + 2\sqrt{3}xy + 15y^2 - 48 = 0$
3. $x^2 - 2\sqrt{3}xy - y^2 - 8 = 0$
4. $3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 - 2x + 2\sqrt{3}y = 0$
5. $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 8\sqrt{2}x - 6 = 0$
6. $3x^2 - 6xy + 3y^2 - 8\sqrt{2}x - 8\sqrt{2}\,y = 0$
7. $13x^2 - 10xy + 13y^2 + 16x + 16y - 56 = 0$
8. $5x^2 + 4xy + 2y^2 - 20x + 10y = 0$
9. $2x^2 - 4xy + 2y^2 - 40x + 20y = 0$
10. $x^2 + 4xy + y^2 - 24x - 24y + 104 = 0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Identificación de cónicas degeneradas

Son aquellas que de acuerdo con el indicador representan una parábola, elipse o hipérbola; sin embargo, al realizar un despeje se obtienen las características para determinar la naturaleza de la ecuación. Las curvas degeneradas representan un punto, dos rectas concurrentes, dos rectas paralelas o sólo una recta.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la naturaleza de la cónica $9x^2 - 6xy + y^2 - 12x + 4y + 4 = 0$.

Solución

De la ecuación se obtiene:

$$A = 9,\ B = -6 \text{ y } C = 1$$

Al sustituir en el indicador,

$$I = (-6)^2 - 4(9)(1) = 36 - 36 = 0$$

Por tanto, la ecuación representa una parábola.

Sin embargo, al factorizar la ecuación,

$$9x^2 - 6xy + y^2 - 12x + 4y + 4 = 0 \rightarrow (3x - y)^2 - 4(3x - y) + 4 = 0$$

$$(3x - y - 2)^2 = 0$$

$$3x - y - 2 = 0$$

Lo que significa que la ecuación representa una línea recta, en este caso se le denomina curva degenerada.

2 Encuentra la naturaleza de la cónica $36x^2 - 24xy + 5y^2 - 12x + 5 = 0$.

Solución

Se utiliza el indicador, $I = B^2 - 4AC$, si $A = 36$, $B = -24$ y $C = 5$

$$I = (-24)^2 - 4(36)(5) = 576 - 720 = -144$$

De acuerdo con el resultado $I < 0$ y la curva representa una elipse; sin embargo, al resolver la ecuación de segundo grado con incógnita x se tiene:

$$36x^2 + (-24y - 12)x + (5y^2 + 5) = 0$$

Donde,

$$x = \frac{-(-24y-12) \pm \sqrt{(-24y-12)^2 - 4(36)(5y^2+5)}}{2(36)} = \frac{(2y+1) \pm (y-2)\sqrt{-1}}{6}$$

Se observa que x es imaginario para cualquier valor de y diferente de 2, luego si $y = 2$, entonces la ecuación representa al punto $P\left(\frac{5}{6}, 2\right)$.

3 ¿Cuál es la naturaleza de la cónica $3x^2 - 7xy - 6y^2 - 2x + 17y - 5 = 0$?

Solución

Para la ecuación $A = 3$, $B = -7$ y $C = -6$, se sustituyen los valores en el indicador y se obtiene:

$$I = (-7)^2 - 4(3)(-6) = 49 + 72 = 121$$

Por lo que se deduce que $I > 0$; esto indica que la curva representa una hipérbola.

No obstante, al despejar x de la ecuación $3x^2 - 7xy - 6y^2 - 2x + 17y - 5 = 0$

$$x = \frac{-(-7y-2) \pm \sqrt{(-7y-2)^2 - 4(3)(-6y^2+17y-5)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{7y+2 \pm \sqrt{121y^2 - 176y + 64}}{6}$$

$$x = \frac{7y+2 \pm \sqrt{(11y-8)^2}}{6}$$

$$x = \frac{7y+2 \pm (11y-8)}{6}$$

Por consiguiente,

$$x = 3y - 1 \text{ y } x = \frac{-2y+5}{3}$$

El resultado anterior indica que la ecuación $3x^2 - 7xy - 6y^2 - 2x + 17y - 5 = 0$, representa a las rectas concurrentes:

$$x - 3y + 1 = 0;\ 3x + 2y - 5 = 0$$

EJERCICIO **49**

Determina la naturaleza de las siguientes cónicas degeneradas.

1. $x^2 + xy - 2y^2 + 3x + 6y = 0$
2. $9x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y + 1 = 0$
3. $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$
4. $4x^2 + 3xy - y^2 + 19x + 4y + 21 = 0$
5. $3x^2 + xy - 2y^2 = 0$
6. $x^2 + 10xy + 25y^2 - 4x - 20y + 4 = 0$
7. $4x^2 - 8xy + 5y^2 + 2y + 1 = 0$
8. $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 12x - 16y + 4 = 0$
9. $x^2 + xy - 6y^2 + 10y - 4 = 0$
10. $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 20x - 30y + 25 = 0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

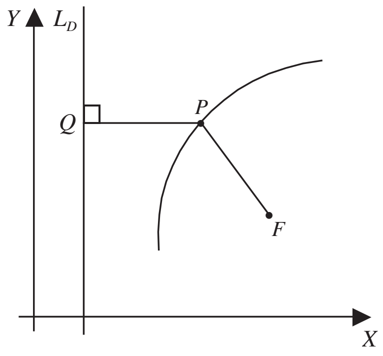
Definición general de cónicas

Lugar geométrico que describen un punto del plano de tal forma que la razón de su distancia a un punto fijo y a una recta fija, siempre es constante.

El punto fijo se llama foco, la recta fija directriz y la distancia constante excentricidad (e).

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{PQ}}=e$$

Gráfica



Elementos

F: Foco
P: $P(x, y)$
L_D: Directriz
Q: punto sobre la directriz

Condiciones:

- Si $e = 1$ el lugar geométrico representa una parábola.
- Si $e < 1$ el lugar geométrico representa una elipse.
- Si $e > 1$ el lugar geométrico representa una hipérbola.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es la ecuación de la cónica cuyo foco es el punto $F(-1, 3)$, ecuación de la directriz $x + 3 = 0$ y excentricidad 1?

Solución

Como la excentricidad es igual a 1, la ecuación a encontrar es de una parábola.

Se aplica la definición de cónicas:

$$\frac{\textit{Distancia del punto al foco}}{\textit{Distancia del punto a la directriz}}=e$$

Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico, entonces:

$$\frac{\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}}{x+3}=1 \rightarrow \frac{\sqrt{x^2+2x+1+y^2-6y+9}}{x+3}=1$$

$$x^2+2x+1+y^2-6y+9=(x+3)^2 \rightarrow x^2+2x+1+y^2-6y+9=x^2+6x+9$$

Al simplificar se obtiene la ecuación:

$$y^2-4x-6y+1=0$$

2 Determina la ecuación de la cónica cuyo foco es el punto $F(3, -2)$, ecuación de la directriz $2x - y + 4 = 0$ y excentricidad $\frac{3}{2}$.

Solución

Como la excentricidad es mayor que 1, la ecuación a encontrar es de una hipérbola.

Se aplica la definición de las cónicas:

$$\frac{\text{Distancia del punto al foco}}{\text{Distancia del punto a la directriz}} = e$$

Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico, entonces:

$$\frac{\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2}}{\frac{2x-y+4}{-\sqrt{5}}} = \frac{3}{2} \rightarrow \frac{-\sqrt{5}\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2}}{2x-y+4} = \frac{3}{2}$$

Se realiza un producto cruzado,

$$-2\sqrt{5}\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2} = 3(2x-y+4)$$

Se elevan al cuadrado ambos miembros,

$$\left[-2\sqrt{5}\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2}\right]^2 = \left[3(2x-y+4)\right]^2$$

$$20\left[(x-3)^2+(y+2)^2\right] = 9(2x-y+4)^2$$

$$20\left(x^2-6x+9+y^2+4y+4\right) = 9\left(4x^2+y^2+16-4xy+16x-8y\right)$$

$$20x^2 - 120x + 180 + 20y^2 + 80y + 80 = 36x^2 + 9y^2 + 144 - 36xy + 144x - 72y$$

Finalmente, al simplificar los términos semejantes e igualar con cero, se obtiene la ecuación:

$$16x^2 - 36xy - 11y^2 + 264x - 152y - 116 = 0$$

3 Determina la ecuación de la cónica cuya directriz es la recta $x + 3y - 5 = 0$, foco en el punto $F(-1, 3)$ y excentricidad $\frac{2}{5}$.

Solución

De acuerdo con el valor de la excentricidad la ecuación de la cónica representa una elipse.

Se aplica la definición de cónicas:

$$\frac{\text{Distancia del punto al foco}}{\text{Distancia del punto a la directriz}} = e$$

Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico, entonces:

$$\frac{\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}}{\frac{x+3y-5}{\sqrt{10}}} = \frac{2}{5} \quad \rightarrow \quad 5\sqrt{10}\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2} = 2(x+3y-5)$$

Ahora, al elevar ambos miembros al cuadrado y simplificar se obtiene la ecuación:

$$\left[5\sqrt{10}\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}\right]^2 = \left[2(x+3y-5)\right]^2$$

$$250(x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9) = 4(x^2 + 9y^2 + 25 + 6xy - 10x - 30y)$$

$$250x^2 + 250y^2 + 500x - 1\,500y + 2\,500 = 4x^2 + 36y^2 + 24xy - 40x - 120y + 100$$

$$246x^2 - 24xy + 214y^2 + 540x - 1\,380y + 2\,400 = 0$$

Por consiguiente la ecuación es:

$$123x^2 - 12xy + 107y^2 + 270x - 690y + 1\,200 = 0$$

EJERCICIO 50

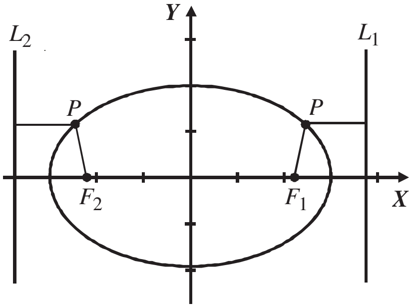
Determina la ecuación de la cónica que satisface las siguientes condiciones:

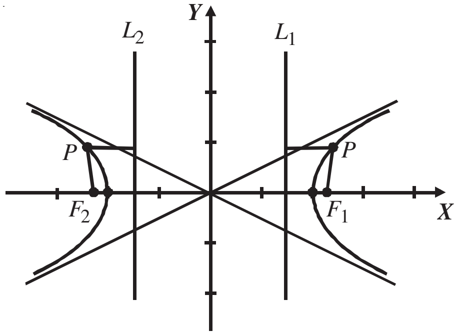
1. $F(0, 3)$, directriz $x = 6$, excentricidad $= \frac{2}{3}$
2. $F(1, 1)$, directriz $y = -2$, excentricidad $= \frac{1}{2}$
3. $F(-2, 3)$, directriz $x = 5$, excentricidad $= 1$
4. $F(0, 0)$, directriz $y = 4$, excentricidad $= \frac{5}{4}$
5. $F(2, -1)$, directriz $x + y = 0$, excentricidad $= \frac{4}{3}$
6. $F(-3, 2)$, directriz $2x + y = 3$, excentricidad $= \sqrt{5}$
7. $F\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$, directriz $3x - 2y = 6$, excentricidad $= 1$
8. $F(-a, a)$, directriz $x - y + a = 0$, excentricidad $= \sqrt{2}$
9. $F(4, 5)$, directriz $3x - 4y + 12 = 0$, excentricidad $= \frac{5}{3}$
10. $F(a\sqrt{3}, 0)$, directriz $x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, excentricidad $= \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Ecuaciones de las directrices de la elipse y de la hipérbola

En la elipse y en la hipérbola existen dos directrices, una para cada foco.





Casos:

I. Si la elipse o la hipérbola es horizontal con centro en el origen, las ecuaciones de sus directrices son:

$$L_1: x = \frac{a^2}{c}\ ;\ L_2:\ x = -\frac{a^2}{c}$$

II. Si la elipse o la hipérbola es vertical con centro en el origen, las ecuaciones de sus directrices son:

$$L_1: y = \frac{a^2}{c}\ ;\ L_2:\ y = -\frac{a^2}{c}$$

III. Si la elipse o la hipérbola es horizontal con centro en (h, k), las ecuaciones de sus directrices son:

$$L_1: x = h + \frac{a^2}{c}\ ;\ L_2:\ x = h - \frac{a^2}{c}$$

IV. Si la elipse o la hipérbola es vertical con centro en (h, k), las ecuaciones de sus directrices son:

$$L_1: y = k + \frac{a^2}{c}\ ;\ L_2:\ y = k - \frac{a^2}{c}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina las ecuaciones de las directrices de la elipse cuya ecuación es:

$$9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$$

Solución

Se transforma a la forma canónica $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

Se precisa que la elipse es horizontal con centro en el origen, donde,

$$a^2 = 25,\ b^2 = 9$$

Luego,

$$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16 \rightarrow c = 4$$

Por consiguiente, las ecuaciones de las directrices son:

$$x = \frac{a^2}{c} = \frac{25}{4}\ ;\ x = -\frac{a^2}{c} = -\frac{25}{4}$$

2 Determina las ecuaciones de las directrices de la ecuación:

$$7x^2 - 9y^2 - 42x + 36y - 36 = 0$$

Solución

Se transforma a la forma ordinaria: $\frac{(x-3)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{7} = 1$

La hipérbola es horizontal con centro en $(3, 2)$, $a^2 = 9$ y $b^2 = 7$

El valor de c es: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9+7} = \sqrt{16} = 4$

En consecuencia, las ecuaciones de las directrices son:

$$x = h + \frac{a^2}{c} = 3 + \frac{9}{4} = \frac{21}{4}\ ;\ x = h - \frac{a^2}{c} = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

EJERCICIO 51

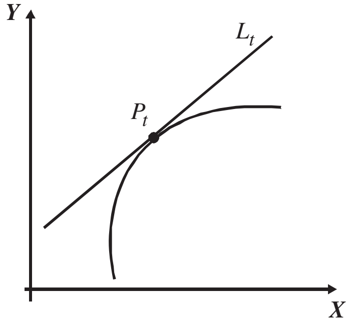
Determina las ecuaciones de las directrices de las siguientes curvas, cuyas ecuaciones son:

1. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$
2. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$
3. $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$
4. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1$
5. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$
6. $25x^2 - 9y^2 + 225 = 0$
7. $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$
8. $\frac{(x+3)^2}{25} - \frac{(y+4)^2}{16} = 1$
9. $x^2 - y^2 + 6y - 10 = 0$
10. $16x^2 + 9y^2 + 64x - 18y - 71 = 0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Tangente a una cónica

Es aquella recta que sólo toca un punto de la curva.



L_t: recta tangente
P_t: punto de tangencia

Las cónicas que se analizarán serán de la forma:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Casos de tangencia:

I. Dado el punto de tangencia.

II. Dada la pendiente de la recta tangente.

III. Dado un punto exterior a la cónica.

Dado el punto de tangencia

Ejemplo

¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ en el punto de tangencia $P_1(x_1, y_1)$?

Solución

Sea $y - y_1 = m(x - x_1)$ la ecuación de la recta tangente, como el punto P_1 pertenece a la curva y a la recta, se resuelve el sistema.

$$\begin{cases} Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ y = mx - mx_1 + y_1 \end{cases}$$

Se sustituye la ecuación de la recta en la ecuación de la curva,

$$Ax^2 + C(mx - mx_1 + y_1)^2 + Dx + E(mx - mx_1 + y_1) + F = 0$$

Al desarrollar y acomodar en términos de x, se obtiene:

$$(A + Cm^2)x^2 + (D + Em + 2Cmy_1 - 2Cm^2x_1)x + (Cm^2x_1{}^2 + Cy_1{}^2 - 2Cmx_1y_1 + Ey_1 - Emx_1 + F) = 0$$

Para que exista solución se debe cumplir que $b^2 - 4ac \geq 0$.

con $a = A + Cm^2$

$b = D + Em + 2Cmy_1 - 2Cm^2x_1$

$c = Cm^2x_1{}^2 + Cy_1{}^2 - 2Cmx_1y_1 + Ey_1 - Emx_1 + F$

La expresión $b^2 - 4ac = 0$ es la condición de tangencia. Al sustituir los valores respectivos, resulta una ecuación con incógnita m, y la ecuación de segundo grado que se obtiene es un trinomio cuadrado perfecto. Es decir, existe una y sólo una recta de pendiente m que es tangente a la curva en el punto $P_1(x_1, y_1)$.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la parábola $x^2 - 4x + y + 4 = 0$, en el punto de tangencia $(3, -1)$?

Solución

El punto pertenece a la recta tangente, entonces la ecuación de la recta es de la forma:

$$y + 1 = m(x - 3), \text{ donde: } y = mx - 3m - 1$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x^2 - 4x + y + 4 = 0 \\ y = mx - 3m - 1 \end{cases}$

Se sustituye $y = mx - 3m - 1$ en la ecuación de la curva,

$$x^2 - 4x + (mx - 3m - 1) + 4 = 0$$
$$x^2 + x(m - 4) + (3 - 3m) = 0$$

En la ecuación $a = 1$, $b = m - 4$ y $c = 3 - 3m$, estos valores se sustituyen en la condición de tangencia.

$$(m - 4)^2 - 4(1)(3 - 3m) = 0$$

De la cual, al desarrollar y simplificar, se obtiene la ecuación:

$$m^2 + 4m + 4 = 0$$
$$(m + 2)^2 = 0$$
$$m = -2$$

Se deduce entonces que la ecuación de la recta es:

$$y = mx - 3m - 1 \rightarrow y = -2x - 3(-2) - 1$$
$$y = -2x + 5$$
$$2x + y - 5 = 0$$

2 Determina la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 16 = 0$ en el punto de tangencia $(2, 2)$.

Solución

Como $(2, 2)$ es el punto de tangencia, entonces la ecuación de la recta es de la forma:

$$y - 2 = m(x - 2), \text{ donde } y = mx - 2m + 2$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 6y - 16 = 0 \\ y = mx - 2m + 2 \end{cases}$$

Se sustituye $y = mx - 2m + 2$ en la ecuación de la circunferencia.

$$x^2 + (mx - 2m + 2)^2 - 2x + 6(mx - 2m + 2) - 16 = 0$$
$$(1 + m^2)x^2 + (-4m^2 + 10m - 2)x + (4m^2 - 20m) = 0$$

Los coeficientes de la ecuación son: $a = 1 + m^2$, $b = -4m^2 + 10m - 2$ y $c = 4m^2 - 20m$, éstos se sustituyen en la condición de tangencia y se obtiene:

$$(-4m^2 + 10m - 2)^2 - 4(1 + m^2)(4m^2 - 20m) = 0$$

De la cual, al desarrollar y simplificar, se obtiene la ecuación:

$$25m^2 + 10m + 1 = 0$$
$$(5m + 1)^2 = 0$$
$$m = -\frac{1}{5}$$

Al final la ecuación de la recta tangente es:

$$y = mx - 2m + 2 \rightarrow y = -\frac{1}{5}x - 2\left(-\frac{1}{5}\right) + 2$$
$$y = -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5} + 2$$
$$y = -\frac{1}{5}x + \frac{12}{5}$$
$$5y = -x + 12$$
$$x + 5y - 12 = 0$$

EJERCICIO 52

Determina la ecuación de la recta tangente a la cónica dada en el punto indicado.

1. $x^2 + y^2 = 25$, en el punto (3, 4)
2. $3x^2 + 4y^2 = 31$, en el punto (3, 1)
3. $x^2 - 4y^2 = 21$, en el punto (5, 1)
4. $y^2 + 6x - 3y + 32 = 0$, en el punto (– 6, – 1)
5. $x^2 + 4x - 5y - 22 = 0$, en el punto (4, 2)
6. $x^2 - y^2 - 4x + 2y + 18 = 0$, en el punto (3, 5)
7. $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 26 = 0$, en el punto (– 1, 3)
8. $4x^2 + 9y^2 + 8x - 6y - 20 = 0$, en el punto (– 1, 2)
9. $3x^2 + 3y^2 - 9x + 3y - 30 = 0$, en el punto (4, – 3)
10. $16x^2 - 25y^2 - 64x - 200y - 255 = 0$, en el punto (– 1, – 1)

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Dada la pendiente de la recta tangente

Encuentra la ecuación de la recta tangente de pendiente m a la cónica.

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Solución

Sea $y = mx + b$ la ecuación de la recta tangente, entonces se resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} &Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ &y = mx + k \end{aligned}$$

Se sustituye $y = mx + b$ en la ecuación de la cónica.

$$Ax^2 + C(mx + k)^2 + Dx + E(mx + k) + F = 0$$

$$(A + Cm^2)x^2 + (2Ckm + D + Em)x + (k^2C + Ek + F) = 0$$

Para que exista solución, $I = b^2 - 4ac \geq 0$, entonces la condición de tangencia es: $b^2 - 4ac = 0$, donde: $a = A + Cm^2$ $b = 2Ckm + D + Em$ $c = k^2C + Ek + F$ y al sustituir los coeficientes de la ecuación en la condición:

$$(2Ckm + D + Em)^2 - 4(A + Cm^2)\,(k^2C + Ek + F) = 0$$

Resulta una ecuación, cuya incógnita es k, obteniendo dos resultados, éstos se sustituyen en la ecuación $y = mx + k$, por consiguiente, resultan dos ecuaciones tangentes con la misma pendiente.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la ecuación de la recta tangente a la cónica $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 24 = 0$ con pendiente $\frac{5}{2}$.

Solución

Si la pendiente de la recta es $\frac{5}{2}$, entonces su ecuación es: $y = \frac{5}{2}x + k$

Se forma el sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x - 2y - 24 = 0 \\ y = \frac{5}{2}x + k \end{cases}$$

Se sustituye la segunda ecuación en la primera,

$$x^2 + \left(\frac{5}{2}x + k\right)^2 + 4x - 2\left(\frac{5}{2}x + k\right) - 24 = 0$$

Se desarrolla y simplifica la ecuación,

$$29x^2 + (20k - 4)x + (4k^2 - 8k - 96) = 0$$

Finalmente, los valores de los coeficientes son: $a = 29$, $b = 20k - 4$ y $c = 4k^2 - 8k - 96$.

Estos valores se sustituyen en la condición de tangencia.

$$(20k - 4)^2 - 4(29)(4k^2 - 8k - 96) = 0$$

$$4k^2 - 48k - 697 = 0$$

$$(2k + 17)(2k - 41) = 0$$

$$k = -\frac{17}{2}, \quad k = \frac{41}{2}$$

Por consiguiente, las ecuaciones de las rectas tangentes son:

Si $k = -\frac{17}{2}$, entonces

$$y = \frac{5}{2}x + k \rightarrow y = \frac{5}{2}x - \frac{17}{2}$$

$$5x - 2y - 17 = 0$$

Si $k = \frac{41}{2}$, entonces

$$y = \frac{5}{2}x + k \rightarrow y = \frac{5}{2}x + \frac{41}{2}$$

$$5x - 2y + 41 = 0$$

2 ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la cónica $x^2 - y^2 = 5$ y tiene pendiente $-\frac{3}{2}$?

Solución

Sea la ecuación de la recta $y = \frac{3}{2}x + k$, entonces al sustituir en la ecuación de la curva,

$$x^2 - \left(-\frac{3}{2}x + k\right)^2 = 5$$

Al desarrollar y simplificar se determina que:

$$-5x^2 + 12kx - 4k^2 - 20 = 0$$

Por consiguiente, al igualar el discriminante a cero, se determina el valor de b,

$$(12k)^2 - 4(-5)(-4k^2 - 20) = 0$$

$$4k^2 - 25 = 0$$

$$k = \frac{5}{2} \text{ o } k = -\frac{5}{2}$$

Finalmente, las ecuaciones de las rectas tangentes son:

$$3x + 2y - 5 = 0; \; 3x + 2y + 5 = 0$$

EJERCICIO 53

Determina la ecuación de la recta tangente que cumpla con las siguientes condiciones:

1. $x^2 + y^2 = 13$, de pendiente $\frac{3}{2}$
2. $x^2 + 9y^2 - 9 = 0$ y es paralela a la recta $2x - 3y - 4 = 0$
3. $y^2 - x + 2y - 10 = 0$ y es paralela a la recta $2x - 12y + 5 = 0$
4. $x^2 - 2x + 8y + 13 = 0$, de pendiente $-\frac{1}{2}$
5. $x^2 - 4y^2 - 2x - 8y + 9 = 0$ y es perpendicular a la recta $4x - y - 5 = 0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Dado un punto exterior a la curva

Para determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1)$ y es tangente a la cónica $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, se sigue el siguiente proceso:

La ecuación de la recta tangente que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1)$ es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Se despeja y:

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

Con esta ecuación y la ecuación de la cónica se forma el sistema:

$$\begin{cases} Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ y = mx - mx_1 + y_1 \end{cases}$$

El cual tiene la forma del caso I.

EJEMPLOS

1. Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto (–1, –1) y es tangente a la cónica $x^2 - 4x - 4y + 16 = 0$.

Solución

La ecuación de la recta tangente que pasa por el punto (–1, –1) tiene la forma:

$$y = mx + m - 1$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} x^2 - 4x - 4y + 16 = 0 \\ y = mx + m - 1 \end{cases}$$

Se sustituye $y = mx + m - 1$ en la ecuación de la cónica,

$$x^2 - 4x - 4(mx + m - 1) + 16 = 0$$
$$x^2 + x(-4m - 4) - 4m + 20 = 0$$

Por la condición de tangencia, se tiene la ecuación de segundo grado,

$$(-4m - 4)^2 - 4(1)(-4m + 20) = 0$$
$$16m^2 + 48m - 64 = 0$$
$$m^2 + 3m - 4 = 0$$
$$(m + 4)(m - 1) = 0$$
$$m = -4,\ m = 1$$

Por consiguiente, las ecuaciones de las rectas tangentes son:

Si $m = -4$	Si $m = 1$
$y = -4x - 4 - 1$	$y = x + 1 - 1$
$y = -4x - 5$	$y = x$
$4x + y + 5 = 0$	$x - y = 0$

2 Encuentra la ecuación de la recta tangente a la cónica $x^2 + y^2 + 8x - 2y - 9 = 0$, y que pasa por el punto exterior $(2, -3)$.

Solución

La ecuación de la recta tangente que pasa por el punto $(2, -3)$ tiene la forma:

$$y = mx - 2m - 3$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 8x - 2y - 9 = 0 \\ y = mx - 2m - 3 \end{cases}$$

Se sustituye $y = mx - 2m - 3$ en la ecuación de la cónica,

$$x^2 + (mx - 2m - 3)^2 + 8x - 2(mx - 2m - 3) - 9 = 0$$

$$(1 + m^2)\, x^2 + x\,(-4m^2 - 8m + 8) + (4m^2 + 16m + 6) = 0$$

Al sustituir los coeficientes en la condición de tangencia, se obtiene:

$$(-4m^2 - 8m + 8)^2 - 4(1 + m^2)\,(4m^2 + 16m + 6) = 0$$

$$5m^2 + 24m - 5 = 0$$

$$(m + 5)(5m - 1) = 0$$

$$m = -5,\; m = \frac{1}{5}$$

Finalmente, las ecuaciones de las rectas tangentes son:

Si $m = -5$

$$y = -5x - 2(-5) - 3$$

$$y = -5x + 7$$

$$5x + y - 7 = 0$$

Si $m = \frac{1}{5}$

$$y = \frac{1}{5}x - 2\left(\frac{1}{5}\right) - 3$$

$$5y = x - 17$$

$$x - 5y - 17 = 0$$

EJERCICIO **54**

Determina la ecuación de la recta tangente a la curva:

1. $y^2 = 8x$, pasa por el punto exterior $(-4, -2)$
2. $x^2 = 8y$, pasa por el punto $(-4, 0)$
3. $x^2 + 3y^2 = 6$, pasa por el punto $(0, 2)$
4. $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 26 = 0$ y pasa por el punto exterior $(4, 6)$
5. $4x^2 - 5y^2 - 16x + 10y - 9 = 0$, pasa por el punto $(1, 3)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Capítulo 12

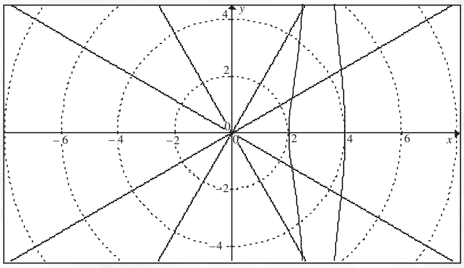
Coordenadas polares

Reseña HISTÓRICA

Nicomedes
(280 *a. C.* – 210 *a. C.*)

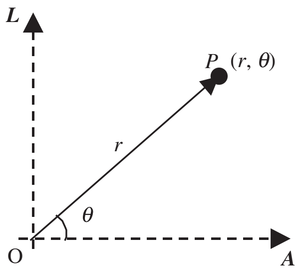
Se sabe muy poco de la vida de Nicomedes, incluso para establecer el periodo en el que vivió hay que hacerlo con referencias indirectas. Se sabe que Nicomedes criticó la duplicación del cubo de Eratóstenes (276 a. C.–194 a. C.) y que Apolonio (262 a. C.–190 a. C.) también habló de Nicomedes.

Es famoso por su tratado *Las líneas de la concoide*, y quiso utilizar la concoide para solucionar los problemas clásicos de la trisección del ángulo y la duplicación del cubo.



Sistema polar

El sistema polar es similar al cartesiano, su objetivo es la representación gráfica de elementos geométricos utilizando pares coordenados de magnitud y dirección, mediante un segmento y un ángulo, tal segmento recibe el nombre de radio vector y el ángulo argumento.



La recta $\overline{OA}$ y el punto P forman un marco de referencia, como los ejes coordenados en el sistema cartesiano.

$\overline{OP} = r$: radio vector

θ: Argumento

O: polo

$\overline{OA}$: Eje polar

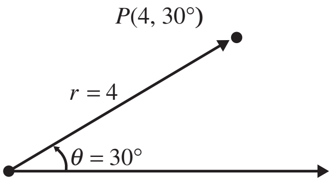
L: Eje $\frac{\pi}{2}$

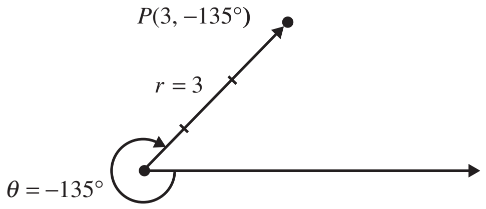
Gráfica de un punto en coordenadas polares

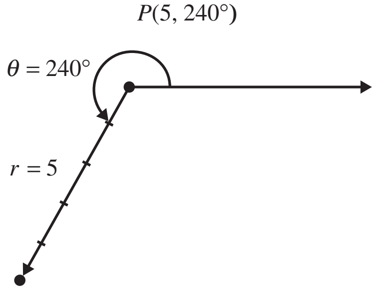
Un punto $P(r, \theta)$ en coordenadas polares se grafica a r unidades del polo sobre un rayo que se llama lado terminal conocido también como radio vector que forma el argumento θ.

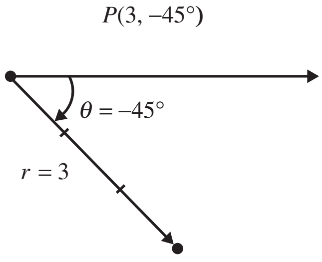
El argumento de un punto cuyas coordenadas son polares, se considera positivo si es en sentido contrario a las manecillas del reloj y negativo si es en el mismo sentido de las manecillas del reloj.

Ejemplos



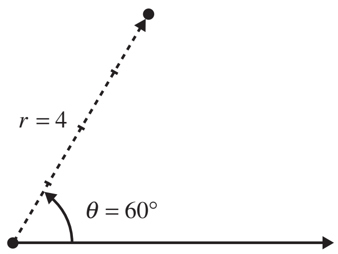




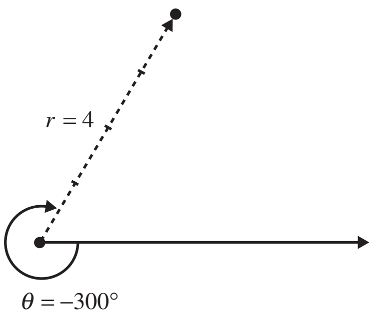


La representación gráfica de un par de coordenadas polares, no son únicas, es decir, hay otros valores coordenados que definen este mismo punto. Como verás a continuación:

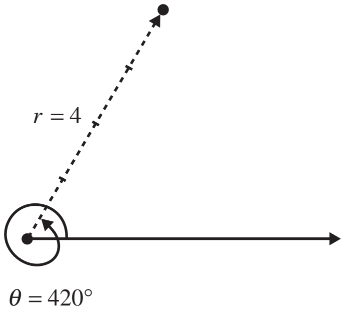
$P(4, 60°)$



$P(4, -300°)$



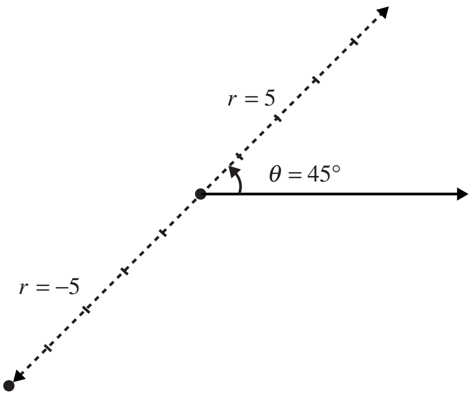
$P(4, 420°)$



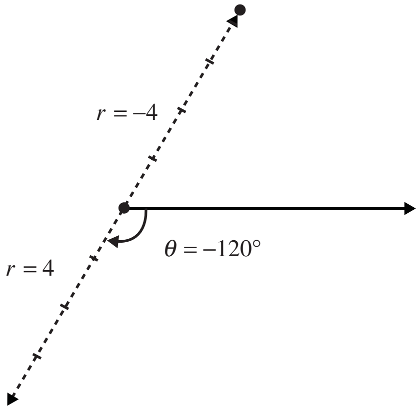
Hay puntos cuya coordenada r se extienden en sentido opuesto al lado terminal del ángulo, que se denota como $-r$, entonces las coordenadas del punto tendrán la forma $P(-r, \theta)$, cabe mencionar que esto no significa que r sea negativa, sólo se designa de este modo a la distancia del lado terminal en esta dirección.

Ejemplos:

$P(-5, 45°)$



$P(-4, -120°)$



Conversión de un punto en coordenadas polares

I. Sea el punto (r, θ), entonces su equivalente es $(-r, \theta + \pi)$

II. Sea el punto $(-r, \theta)$, entonces su equivalente es $(r, \theta - \pi)$

EJEMPLOS

1 Determina un punto equivalente a (– 2, 45°), cuyo radio vector sea positivo.

Solución

Se aplican las equivalencias,

$$(-2, 45°) = (2, 45° - 180°) = (2, -135°) = (2, 225°)$$

2 Encuentra un punto equivalente a (3, 215°), cuyo radio vector sea negativo.

Solución

Se aplican las equivalencias,

$$(3, 215°) = (-3, 215° + 180°) = (-3, 395°) = (-3, 35°)$$

3 Calcula un punto equivalente a (–5, – 60°), cuyo radio vector sea positivo.

Solución

Se aplican las equivalencias,

$$(-5, -60°) = (5, -60° - 180°) = (5, -240°) = (5, 120°)$$

Relación entre las coordenadas rectangulares y polares

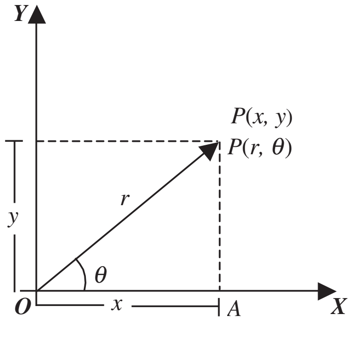
Las coordenadas polares representan a los puntos del plano en función de su distancia al origen y su ángulo de inclinación medido respecto a la horizontal.

$$P(r, \theta)$$

Donde r: distancia del punto al origen.

θ: Ángulo de inclinación.

Las coordenadas rectangulares (x, y) y las polares (r, θ) de un punto P se relacionan como sigue:



Por el teorema de Pitágoras

$$r^2 = x^2 + y^2 \rightarrow r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$$

En el triángulo rectángulo OAP

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \rightarrow x = r\cos\theta$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \rightarrow y = r\operatorname{sen}\theta$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Transformación de un punto en coordenadas polares a rectangulares

EJEMPLOS

1 Determina las coordenadas rectangulares del punto $P(6, 150º)$.

Solución

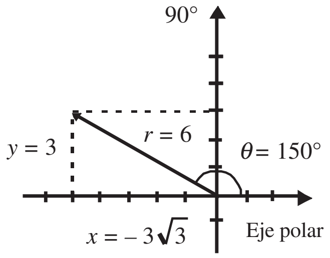
Las coordenadas polares del punto P son: $r = 6$ y $\theta = 150º$

Se sustituyen los valores de r y θ:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,sen\,\theta$$
$$x = 6\cos 150º \qquad y = 6\,sen\,150º$$
$$x = 6\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad y = 6\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$x = -3\sqrt{3} \qquad y = 3$$

Por tanto, las coordenadas de punto en el sistema de coordenadas rectangulares son: $\left(-3\sqrt{3}, 3\right)$

Gráfica



Transformación de un punto en coordenadas rectangulares a polares

EJEMPLOS

1 Transforma a coordenadas polares el punto $A(-4, -7)$.

Solución

Las coordenadas rectangulares del punto A son: $x = -4$; $y = -7$

Los valores se sustituyen en las fórmulas que determinan la longitud del radio vector y el argumento.

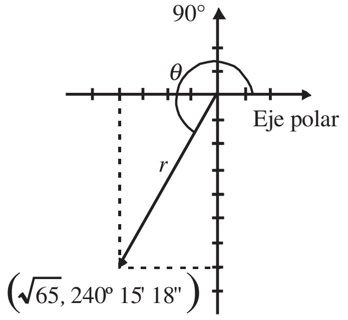
$$r = \pm\sqrt{x^2 + y^2} = \pm\sqrt{(-4)^2 + (-7)^2} = \pm\sqrt{16 + 49} = \pm\sqrt{65}$$

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = tan^{-1}\left(\frac{-7}{-4}\right) = tan^{-1}(1.75) = 60°\ 15'\ 18''$$

Finalmente, las coordenadas del punto A en coordenadas polares son:

$$\left(\sqrt{65},\ 240°\ 15'\ 18''\right) = \left(-\sqrt{65},\ 60°\ 15'\ 18''\right)$$

Gráfica



EJERCICIO 55

Transforma a coordenadas rectangulares los siguientes puntos:

1. $A(6, 45°)$
2. $R(4, 300°)$
3. $P\left(4\sqrt{2}, 135°\right)$
4. $A\left(8, \frac{\pi}{6}\right)$
5. $B\left(10, \frac{5\pi}{3}\right)$
6. $C\left(4, -\frac{\pi}{2}\right)$
7. $Q(5, 60°)$
8. $M(-7, 315°)$
9. $N(-10, 225°)$
10. $S(15, -210°)$
11. $T(-3, 120°)$
12. $A\left(-2, -\frac{\pi}{3}\right)$
13. $S\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\pi}{6}\right)$
14. $C\left(\sqrt{3}, -\frac{11}{6}\pi\right)$
15. $B\left(-\frac{3}{4}, \frac{\pi}{12}\right)$

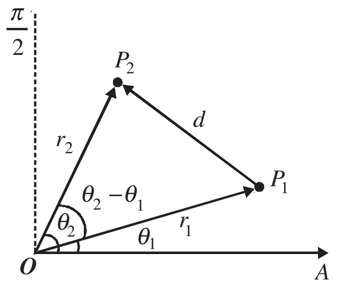
Transforma a coordenadas polares los siguientes puntos:

16. $A(5, 12)$
17. $P(-6, -4)$
18. $C(4, -3)$
19. $B(9, -12)$
20. $C(4, 0)$
21. $W(0, -6)$
22. $M(3, -4)$
23. $Q(-12, 5)$
24. $D\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
25. $F(24, 7)$
26. $Z\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
27. $Q(5, -3)$
28. $L(-3, 0)$
29. $J\left(\frac{1}{2}, -2\right)$
30. $K(0, 5)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Distancia entre dos puntos en coordenadas polares

Dado $P_1(r_1, \theta_1)$ y $P_2(r_2, \theta_2)$ puntos en el sistema polar:



De la gráfica se tiene el triángulo OP_1P_2 del cual se desea determinar la distancia d, esto se obtiene aplicando la ley de los cosenos

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)$$

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

EJEMPLOS

1 Obtén la distancia entre los puntos $A(3, 90^o)$ y $B(-2, 30^o)$.

Solución

Se sustituyen los valores $r_1 = 3$, $\theta_1 = 90^o$, $r_2 = -2$ y $\theta_2 = 30^o$, en la fórmula, para obtener:

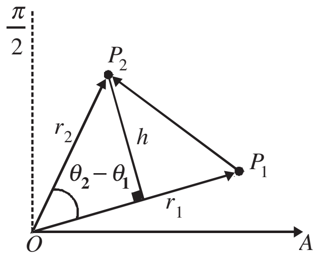
$$d = \sqrt{(3)^2 + (-2)^2 - 2(3)(-2)\cos(30^o - 90^o)}$$

$$d = \sqrt{9+4+12\cos(-60°)} = \sqrt{9+4+12\cos(60°)} = \sqrt{13+12\left(\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{13+6} = \sqrt{19}\,u$$

Por consiguiente, la distancia entre los puntos es de $\sqrt{19}$ unidades.

Área de un triángulo en coordenadas polares

Sea el triángulo determinado por los puntos $O(0, 0)$, $P_1(r_1, \theta_1)$ y $P_2(r_2, \theta_2)$, en el sistema polar:



El área del triángulo OP_1P_2 es:

$A = \frac{1}{2} r_1 \cdot h$, pero $h = r_2 \, sen\,(\theta_2 - \theta_1)$

$$A = \frac{1}{2}\left| r_1 \cdot r_2 \cdot sen(\theta_2 - \theta_1)\right|$$

EJEMPLOS

1 Determina el área del triángulo formado por los puntos $O(0, 0)$ $A(7, 10°)$ y $B(4, 40°)$.

Solución

Se sustituyen los valores $r_1 = 7$, $\theta_1 = 10^o$, $r_2 = 4$ y $\theta_2 = 40^o$, en la fórmula, para obtener:

$$A = \frac{1}{2}(7)(4)\,sen(40^o - 10^o) = 14\,sen(30°) = 14\left(\frac{1}{2}\right) = 7u^2$$

Finalmente, el área del triángulo es de $7u^2$.

EJERCICIO 56

Determina la distancia entre los siguientes pares de puntos:

1. $A(2, 30°)$ y $B(-1, 120°)$
2. $C(-6, 0°)$ y $D(-3, 90°)$
3. $E(12, 150°)$ y $F(5, -30°)$
4. $G(-4, -60°)$ y $H(2, 240°)$
5. $I(5, 45°)$ y $J(8, 15°)$

Obtén el área del triángulo determinado por los puntos:

6. $O(0, 0)$, $A(6, 0°)$ y $B(12, 90°)$
7. $O(0, 0)$, $R(4, 30°)$ y $S(3, 120°)$
8. $O(0, 0)$, $A(-8, 135°)$ y $B(8, 45°)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Transformación de una ecuación rectangular a polar

Para transformar una ecuación en coordenadas rectangulares a una ecuación en coordenadas polares se utilizan las siguientes fórmulas:

$$x = r\cos\theta\ ;\ \ y = r\,sen\,\theta;\ x^2 + y^2 = r^2$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Transforma la ecuación dada a su forma polar.

$$x^2 - y^2 = 16$$

Solución

Se sustituyen $x = r\cos\theta$, $y = r\,sen\,\theta$ en la ecuación rectangular.

$$x^2 - y^2 = 16 \rightarrow (r\cos\theta)^2 - (r\,sen\,\theta)^2 = 16$$

$$r^2\cos^2\theta - r^2 sen^2\theta = 16 \qquad \text{Se factoriza } r^2$$

$$r^2(\cos^2\theta - sen^2\theta) = 16$$

Pero $\cos^2\theta - sen^2\theta = \cos 2\theta$ sustituyendo,

$$r^2\cos 2\theta = 16$$

Se despeja r^2

$$r^2 = \frac{16}{\cos 2\theta}, \text{ por identidad recíproca } \frac{1}{\cos 2\theta} = \sec 2\theta, \text{ entonces}$$

$$r^2 = 16\sec 2\theta$$

Finalmente, la transformación en coordenadas polares de la ecuación $x^2 - y^2 = 16$, es:

$$r^2 = 16\sec 2\theta$$

2 Transforma a su forma polar la ecuación $4x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 13 = 0$.

Solución

Al sustituir $x = r\cos\theta$, $y = r\,sen\,\theta$ en la ecuación rectangular se obtiene:

$$4(r\cos\theta)^2 + 4(r\,sen\,\theta)^2 - 2(r\cos\theta) - 16(r\,sen\,\theta) + 13 = 0$$

$$4r^2\cos^2\theta + 4r^2 sen^2\theta - 2r\cos\theta - 16r\,sen\,\theta + 13 = 0$$

$$4r^2(\cos^2\theta + sen^2\theta) - 2r\cos\theta - 16r\,sen\,\theta + 13 = 0$$

Pero $\cos^2\theta + sen^2\theta = 1$

$$4r^2 - 2r\cos\theta - 16r\,sen\,\theta + 13 = 0$$

EJERCICIO 57

Transforma a ecuaciones polares las siguientes expresiones:

1. $y = -3$
2. $x = 5$
3. $y = \sqrt{3}x$
4. $2x - 3y = 6$
5. $y = -x + 2$
6. $x\cos w + y\,sen\,w - p = 0$
7. $x^2 + y^2 = 16$
8. $x^2 + y^2 + 4x = 0$
9. $x^2 + y^2 - 2y = 0$
10. $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$
11. $y^2 = -8x$
12. $y^2 - 12x - 36 = 0$
13. $(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} = 2xy$
14. $x^2 - 2x - 4y - 3 = 0$
15. $9x^2 + 4y^2 = 36$
16. $16x^2 + 25y^2 = 400$
17. $9x^2 - 72y + 25y^2 - 81 = 0$
18. $\frac{x^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$
19. $x^2 - y^2 = 9$
20. $16x^2 - 9y^2 = 144$
21. $\frac{x^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$
22. $(x^2 + y^2 - x)^2 = x^2 + y^2$
23. $xy = -4$
24. $\sqrt{4x^2 - 4y^2} = 2x^2 + 2y^2$
25. $\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 1$
26. $x^2y - 2x^2 - 16y = 0$
27. $y^2 = 12x$
28. $4x - 3y + 12 = 0$
29. $x^2 - 4y^2 = 16$
30. $x^2 + 4y - 8 = 0$
31. $(x^2 + y^2 + 3y)^2 = 4x^2 + 4y^2$
32. $4x^2 + 9y^2 = 36$
33. $x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$
34. $3x^2 + 4y^2 - 6x - 9 = 0$
35. $4y^2 - 5x^2 - 8y - 6 = 0$
36. $x^2 - 5y + 15 = 0$
37. $3y^2 + 4x - 2y = 0$
38. $x^2 + 3xy - y^2 = 4$
39. $y = x^3 - 2x^2$
40. $y = \frac{3x-2}{x-1}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Transformación de una ecuación polar a rectangular

De las fórmulas: $x = r\ cos\ \theta$, $y = r\ sen\ \theta$ y $x^2 + y^2 = r^2$, se aplican los despejes respectivos:

$$cos\ \theta = \frac{x}{r},\ sen\ \theta = \frac{y}{r} \text{ y } r = \sqrt{x^2+y^2}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la ecuación rectangular del lugar geométrico, cuya ecuación es:

$$r = \frac{1}{1-2\ sen\ \theta}$$

Solución

Se elimina el denominador.

$$r(1-2\ \ sen\ \ \theta)=1\ \ \rightarrow r - 2r\ sen\ \theta = 1$$

Y al sustituir en la ecuación $y = r\ sen\ \theta$ y $r = \sqrt{x^2+y^2}$, se obtiene:

$$\sqrt{x^2+y^2} - 2y = 1$$

Al despejar el radical y elevar al cuadrado resulta la ecuación en su forma rectangular.

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = (1+2y)^2\ \rightarrow x^2 + y^2 = 1 + 4y + 4y^2$$

$$x^2 + y^2 - 1 - 4y - 4y^2 = 0$$

$$x^2 - 3y^2 - 4y - 1 = 0$$

2 Transforma la ecuación $r = \dfrac{4}{1-sen\theta}$ a coordenadas rectangulares.

Solución

Se elimina el denominador de la ecuación.

$$r(1-sen\ \theta) = 4\ \ \rightarrow r - r\ sen\ \theta = 4$$

Y al sustituir $y = r\ sen\ \theta$ y $r = \sqrt{x^2+y^2}$, se obtiene:

$$r - rsen\ \theta = 4 \rightarrow \sqrt{x^2+y^2} - y = 4$$

$$x^2 + y^2 = (4 + y)^2$$

$$x^2 + y^2 = 16 + 8y + y^2$$

$$x^2 - 8y - 16 = 0$$

3 Convierte la ecuación $r = 5\ cos\ 2\theta$ a coordenadas rectangulares.

Solución

Se sabe que $cos\ 2\theta = cos^2\ \theta - sen^2\ \theta$, entonces:

$$r = 5\ cos\ 2\theta = 5(cos^2\ \theta - sen^2\ \theta)$$

Y al sustituir,

$$r = \sqrt{x^2+y^2}\ ,\ cos\ \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ \text{ y }\ sen\ \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Se obtiene finalmente:

$$r = 5(cos^2\ \theta - sen^2\ \theta) \rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 5\left[\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2\right]$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = 5\left[\frac{x^2}{x^2+y^2} - \frac{y^2}{x^2+y^2}\right]$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = 5\left[\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right]$$

$$\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2} = 5\left(x^2-y^2\right)$$

$$\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}} = 5\left(x^2-y^2\right)$$

4 Convierte $r = \dfrac{3sen\ \theta}{2-3cos\ \theta}$ a coordenadas rectangulares.

Solución

Si $cos\ \theta \neq \dfrac{2}{3}$, entonces la ecuación se puede representar como:

$$2r - 3r\ cos\ \theta = 3\ sen\ \theta$$

Al sustituir $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $x = r\ cos\ \theta$ y $sen\ \theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ se obtiene:

$$2r - 3rcos\ \theta = 3sen\ \theta \rightarrow 2\sqrt{x^2+y^2} - 3x = \frac{3y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$2\left(x^2+y^2\right) - 3x\sqrt{x^2+y^2} = 3y$$

$$2\left(x^2+y^2\right) = 3y + 3x\sqrt{x^2+y^2}$$

EJERCICIO 58

Transforma a su forma rectangular las siguientes ecuaciones polares.

1. $r=\frac{5}{sen\ \theta}$
2. $r = -8\ sec\ \theta$
3. $r=\frac{4\ cos\ \theta}{2-cos^2\ \theta}$
4. $r = 4\ sen\ \theta$
5. $r=\frac{5}{2\ sen\quad +3}$
6. $r = sen\ 2\theta$
7. $r=\frac{16}{\sqrt{1+sen^2\ \theta}}$
8. $r(1 - cos\ \theta) = 5$
9. $r = 2 - cos\ \theta$
10. $r - cos\ \theta = 4$
11. $r = 4(1 - cos\ \theta)$
12. $r^2\ sen\ 2\theta = 9$
13. $r(1 + sen\ \theta) = -3$
14. $r(2 +2\ cos\ \theta) = 8$
15. $r = 4\ cos\ 2\theta$
16. $r=\sqrt{sen\ \theta}$
17. $r=\frac{6}{3+\ sen\ \theta}$
18. $r=\frac{2}{2-\ cos\ \theta}$
19. $r=\frac{3}{1-2\ cos\ \theta}$
20. $r=\frac{1}{cos\ \theta+2}$
21. $r=\frac{4}{2-cos\theta}$
22. $r=4\sqrt{cos\ 2\theta}$
23. $r=\frac{6\ sec\ \theta}{2\ sec\ \theta+3}$
24. $r=\frac{2\ csc\ \theta}{1-csc\ \theta}$
25. $sen^2\ \theta - 4r\ cos^3\ \theta = 0$
26. $r^2 - 5r\ cos\ \theta + 3r\ sen\ \theta - 8 = 0$
27. $r^2\ cos^2\ \theta + r(\ 3\ cos\ \theta - 2\ sen\ \theta) + 4 = 0$
28. $r = 12\ cot\ \theta\ csc\ \theta$
29. $r=\frac{1}{\sqrt{cos\ 2\theta}}$
30. $r\ cos\ (\theta - 60°) = -4$
31. $\theta = arc\ tan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
32. $r = cos\ 3\theta$
33. $r\ sec\ 3\theta = 2$
34. $r = 5\ cos\ 4\theta$
35. $r = 3\theta$
36. $r=3\ sen\ \frac{\theta}{2}$
37. $r=2\ cos^2\ \frac{\theta}{4}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Identificación de una cónica en su forma polar

Sean las ecuaciones de las cónicas:

$$\text{Horizontales } r = \frac{ke}{1 \pm e\cos\theta}; \text{ Verticales } r = \frac{ke}{1 \pm e\,sen\,\theta}$$

Entonces, la ecuación representa:

- Parábola si $e = 1$
- Elipse si $0 < e < 1$
- Hipérbola si $e > 1$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Identifica la naturaleza de la siguiente ecuación $r = \dfrac{4}{1 - \cos\theta}$.

Solución

Se compara la ecuación $r = \dfrac{4}{1 - \cos\theta}$ con la ecuación de la cónica $r = \dfrac{ke}{1 - e\cos\theta}$, se obtiene que $e = 1$, por consiguiente, la ecuación representa una parábola horizontal.

2 Identifica la naturaleza de la siguiente ecuación $r = \dfrac{3}{5 + 2\,sen\,\theta}$.

Solución

La ecuación $r = \dfrac{3}{5 + 2\,sen\,\theta}$ se representa como $r = \dfrac{\frac{3}{5}}{1 + \frac{2}{5}sen\,\theta}$, comparando con la ecuación $r = \dfrac{ke}{1 + e\,sen\,\theta}$, se determina que $e = \dfrac{2}{5}$; este resultado indica que se trata de una elipse vertical.

3 Identifica la naturaleza de la siguiente ecuación $r = \dfrac{4}{2 - 3\cos\theta}$.

Solución

La ecuación $r = \dfrac{4}{2 - 3\cos\theta}$ se representa como $r = \dfrac{2}{1 - \frac{3}{2}\cos\theta}$, la cual es de la forma $r = \dfrac{ke}{1 - e\cos\theta}$, donde $e = \dfrac{3}{2}$; esto indica que se trata de una hipérbola horizontal.

EJERCICIO 59

Identifica la naturaleza de las siguientes ecuaciones:

1. $r=\frac{8}{1+\cos\theta}$
2. $r=\frac{2}{1-\cos\theta}$
3. $r=\frac{8}{2+2\,sen\,\theta}$
4. $r=\frac{20}{3-3\,sen\,\theta}$
5. $r=\frac{20}{5-4\,sen\,\theta}$
6. $r=\frac{16}{4-5\,sen\,\theta}$
7. $r=\frac{15}{3+2\cos\theta}$
8. $r=\frac{21}{3-\cos\theta}$
9. $r=\frac{18}{2-5\cos\theta}$
10. $r=\frac{36}{4+9\cos\theta}$
11. $r=\frac{4}{3\,sen\,\theta-1}$
12. $r=\frac{2}{1-sen\,\theta}$
13. $r=\frac{-8}{3-4\cos\theta}$
14. $r=\frac{45}{5+4\cos\theta}$
15. $r=\frac{4}{1+\cos\theta}$
16. $r=\frac{16}{\cos\theta-2}$
17. $r=\frac{-12}{7-4\cos\theta}$
18. $r=\frac{6}{4-3\,sen\,\theta}$
19. $r=\frac{5}{1+sen\,\theta}$
20. $r=\frac{-10}{3-2\,sen\,\theta}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Gráfica de una ecuación en coordenadas polares

La gráfica de una ecuación en coordenadas polares (r, θ), es el conjunto de los puntos que tienen por lo menos un par de coordenadas polares (r, θ) y que satisfacen la ecuación $r = f(\theta)$.

Análisis de una ecuación en coordenadas polares

1. Una curva es simétrica respecto a la recta $\frac{\pi}{2}$, si se cumple que:

$$f(\pi-\theta)=f(\theta)$$

   Esto es, se sustituye el punto $(r, \pi-\theta)$ por (r, θ)

2. Una curva es simétrica con el polo si se cumple que:

$$f(\pi+\theta)=f(\theta)$$

   Esto es, se sustituye el punto $(r, \pi+\theta)$ por (r, θ)

3. Una curva es simétrica con el eje polar si se cumple que:

$$f(-\theta)=f(\theta)$$

   Esto es, se sustituye el punto $(r, -\theta)$ por (r, θ)

Si una curva cumple con dos de los casos anteriores, se deduce que el tercer caso también se cumple.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Traza la gráfica de la ecuación $r = 4\,cos\,2\theta$.

Solución

Paso I. Se analizan las simetrías de la ecuación:

1. Simetría con el eje $\frac{\pi}{2}$

Se sustituye el punto $(r,\ \pi - \theta)$, entonces,

$$r = 4\,cos\,2\,(\pi - \theta)$$

Se aplican las identidades,

$$\begin{aligned} r = 4\,cos\,2(\pi - \theta) &= 4\,cos\,(2\pi - 2\theta)\\ &= 4[cos\,2\pi\ \ cos\,2\theta + sen\,2\pi\ \ sen\,2\theta]\\ &= 4[(1)\,cos\,2\theta + (0)\,sen\,2\theta]\\ r &= 4\,cos\,2\theta \end{aligned}$$

La ecuación es idéntica a la original, por consiguiente, es simétrica respecto a $\frac{\pi}{2}$.

2. Simetría con el polo.

Se sustituye el punto $(r,\ \pi + \theta)$, entonces,

$$r = 4\,cos\,2(\pi + \theta)$$

Se aplican las identidades,

$$\begin{aligned} r = 4\,cos\,2(\pi + \theta) &= 4\,cos\,(2\pi + 2\theta)\\ &= 4[cos\,2\pi\ \ cos\,2\theta - sen\,2\pi\ \ sen\,2\theta]\\ &= 4[(1)\,cos\,2\theta - (0)\,sen\,2\theta]\\ r &= 4\,cos\,2\theta \end{aligned}$$

La ecuación no se alteró, por tanto, es simétrica con el polo.

3. Simetría con el eje polar.

Se sustituye el punto $(r, -\theta)$, entonces,

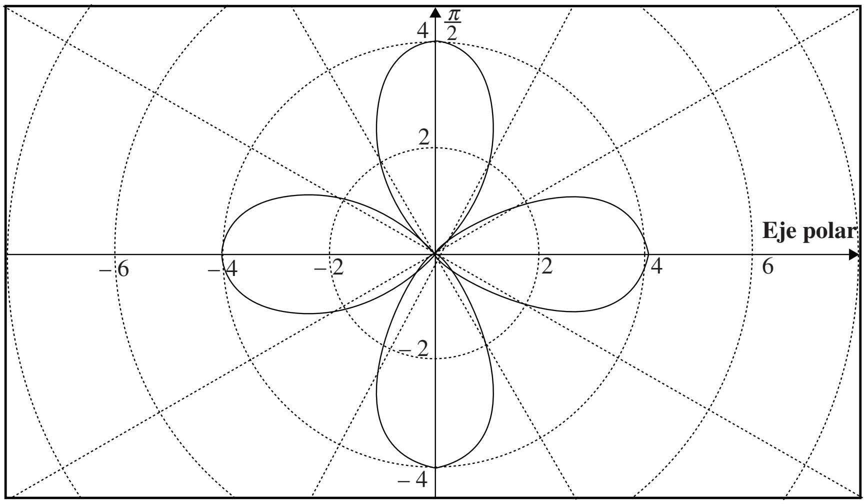
$$r = 4\,cos\,2(-\theta) = r = 4\,cos\,(-2\theta) = 4\,cos\,2\theta$$

La ecuación no se alteró, por consiguiente, es simétrica con el eje polar.

Paso II. Se una tabla de valores.

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$r = 4\,cos\,2\theta$	4	2	0	– 2	– 4	– 2	0	2	4

Gráfica



Rosa de cuatro pétalos

2 Construye la gráfica de la ecuación $r = 2 - 2\, cos\, \theta$.

Solución

Paso I. Se analizan las simetrías de la ecuación:

1. Simetría con el eje $\frac{\pi}{2}$.

   Se sustituye el punto $(r, \pi - \theta)$, entonces,

$$r = 2 - 2\, cos\,(\pi - \theta)$$

Se aplican identidades trigonométricas,

$$\begin{aligned} r = 2 - 2cos\,(\pi - \theta) &= 2 - 2[cos\,\pi\ \ cos\,\theta + sen\,\pi\ sen\,\theta] \\ &= 2 - 2[(-1)\, cos\,\theta + (0)\, sen\,\theta] \\ &= 2 - 2[-cos\,\theta] \\ r &= 2 + 2\, cos\,\theta \end{aligned}$$

La curva no es simétrica respecto al eje $\frac{\pi}{2}$.

2. Simetría con el polo.

   Se sustituye el punto $(r, \pi + \theta)$, entonces,

$$r = 2 - 2\, cos\,(\pi + \theta)$$

Se aplican identidades,

$$\begin{aligned} r = 2 - 2cos\,(\pi + \theta) &= 2 - 2[cos\,\pi\ \ cos\,\theta - sen\,\pi\ \ sen\,\theta] \\ &= 2 - 2[(-1)\, cos\,\theta - (0)\, sen\,\theta] \\ &= 2 - 2[-cos\,\theta] \\ r &= 2 + 2cos\,\theta \end{aligned}$$

La curva no es simétrica respecto al polo.

3. Simetría con el eje polar.

   Se sustituye el punto $(r, -\theta)$, entonces,

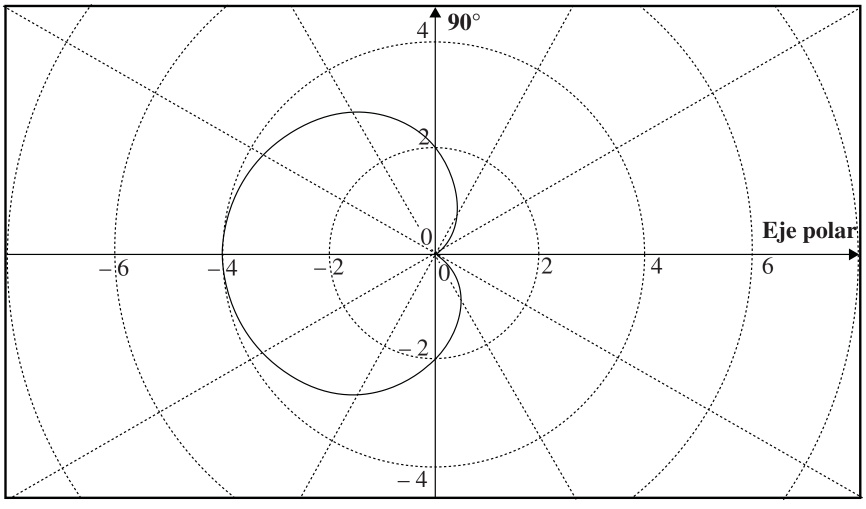
$$r = 2 - 2\, cos\,(-\theta) = 2 - 2\, cos\,\theta$$

Por tanto, la curva es simétrica respecto al eje polar.

Paso II. Se construye una tabla de valores.

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$r = 2 - 2\, cos\,\theta$	0	0.26	0.58	1	2	3	3.41	3.73	4

Gráfica



Cardioide

3 Grafica la ecuación $r = 4 + 5\ sen\ \theta$.

Solución

Paso I. Se analizan las simetrías de la ecuación.

1. Simetría con el eje $\frac{\pi}{2}$.

Se sustituye el punto $(r, \pi - \theta)$, entonces,

$$r = 4 + 5\ sen\ (\pi - \theta)$$

Se aplican identidades trigonométricas,

$$\begin{aligned} r = 4 + 5\ sen\ (\pi - \theta) &= 4 + 5[sen\ \pi\ cos\ \theta - cos\ \pi\ sen\ \theta] \\ &= 4 + 5[(0)\ cos\ \theta - (-1)\ sen\ \theta] \\ &= 4 + 5[sen\ \theta] \\ r &= 4 + 5\ sen\ \theta \end{aligned}$$

De acuerdo con el resultado, la curva es simétrica respecto al eje $\frac{\pi}{2}$.

2. Simetría con el polo.

Se sustituye el punto $(r, \pi + \theta)$, entonces,

$$r = 4 + 5\ sen\ (\pi + \theta)$$

Se aplican identidades,

$$\begin{aligned} r = 4 + 5sen\ (\pi + \theta) &= 4 + 5[sen\ \pi\ cos\ \theta + cos\ \pi\ sen\ \theta] \\ &= 4 + 5[(0)\ cos\ \theta + (-1)\ sen\ \theta] \\ &= 4 + 5[-\ sen\ \theta] \\ r &= 4 - 5\ sen\ \theta \end{aligned}$$

Por tanto, la curva no es simétrica respecto al polo.

3. Simetría con el eje polar.

Se sustituye el punto $(r, -\theta)$, entonces,

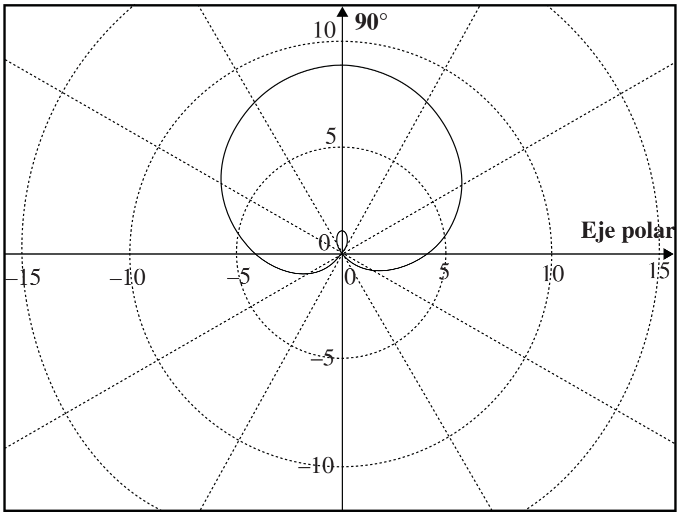
$$r = 4 + 5\ sen\ (-\theta) = 4 - 5\ sen\ \theta$$

Por consiguiente, la curva no es simétrica respecto al eje polar.

Paso II. Se construye una tabla de valores.

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	240°	270°
$r = 4 + 5\ sen\ \theta$	4	6.5	7.53	8.3	9	8.3	7.53	6.5	4	1.5	– 0.33	– 1

Gráfica



Caracol de Pascal

EJERCICIO 60

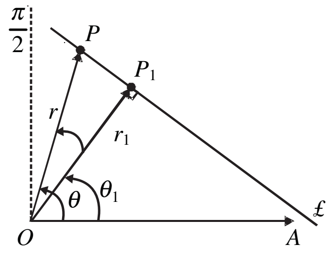
Traza la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones.

1. $r = 3\ sen\ \theta$ (Circunferencia)
2. $r = \dfrac{3}{1 + sen\ \theta}$ (Parábola)
3. $r = \dfrac{6}{4 - 3\ sen\ \theta}$ (Elipse)
4. $r = \dfrac{4}{2 - 3\ cos\ \theta}$ (Hipérbola)
5. $r = \dfrac{2}{sen\ \theta + cos\ \theta}$ (Recta)
6. $r = sen\ 3\theta$ (Rosa de 3 pétalos)
7. $r = 4\ cos\ 3\theta$ (Rosa de 3 pétalos)
8. $r = 2 - 3\ cos\ \theta$ (Caracol con lazo)
9. $r = 3\ cos\ 3\theta$ (Rosa de 3 pétalos)
10. $r^2 = 16\ cos\ 2\theta$ (Lemniscata)
11. $r = 2\theta$ (Caracol)
12. $r = 3\ sen\ 2\theta$ (Rosa de 4 pétalos)
13. $r = 3(1 + cos\ \theta)$ (Cardioide)
14. $r = 2\ sen\ 4\theta$ (Rosa de 8 pétalos)
15. $r^2 = -4\ cos\ 2\theta$ (Lemniscata)
16. $r^2 = 25\ sen\ 2\theta$ (Lemniscata)
17. $r = 4 - 2\ sec\ \theta$ (Concoide de Nicomedes)
18. $r = 3 + csc\ \theta$ (Concoide de Nicomedes)
19. $r = \dfrac{2\pi}{\theta}$ (Espiral recíproca)
20. $r = \theta\ (1 - cos\ \theta)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Ecuación polar de la recta

Dados los puntos $P(r, \theta)$ y $P_1(r_1, \theta_1)$ sobre la recta £ en el sistema polar:



Del triángulo rectángulo OPP_1 se tiene que:

$$cos\left(\theta-\theta_1\right)=\frac{r_1}{r}$$

Entonces, la ecuación polar de la recta es:

$$£:\ r\cdot cos\left(\theta-\theta_1\right)=r_1$$

Casos particulares

Caso I.

Si $\theta_1 = 0°$ entonces $r\ cos\ \theta = r_1$

La recta es perpendicular al eje polar y se encuentra a r_1 unidades a la derecha del polo.

Caso II.

Si $\theta_1 = 180°$ entonces $r\ cos\ \theta = -\ r_1$

La recta es perpendicular y está a r_1 unidades a la izquierda del polo.

Caso III.

Si $\theta_1 = 90°$ entonces $r\ sen\ \theta = r_1$

La recta es paralela al eje polar a r_1 unidades por arriba del eje polar.

Caso IV.

Si $\theta_1 = 270°$ entonces $r\ sen\ \theta = -\ r_1$

La recta es paralela al eje polar a r_1 unidades por debajo del eje polar.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la ecuación de la recta en su forma polar, que pasa por el punto $P(6, 90°)$ y es paralela al eje polar.

Solución

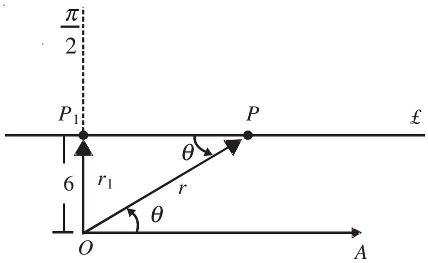
En la gráfica se observa que la recta es paralela al eje polar y está por arriba 6 unidades, entonces se aplica el caso III.

Entonces $r_1 = 6$, al sustituir este valor en la fórmula resulta la ecuación:

$$r\ sen\ \theta = r_1 \rightarrow r\ sen\ \theta = 6$$

Por tanto, la ecuación de la recta en su forma polar es £: $r\ sen\ \theta = 6$.

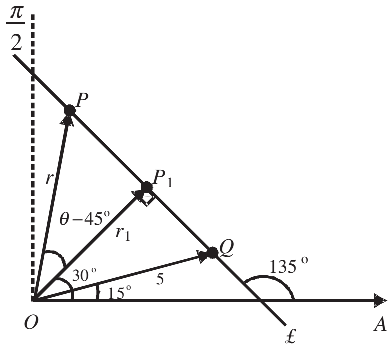
Gráfica



2 Determina la ecuación de la recta en su forma polar, que pasa por el punto Q (5, 15°) y forma un ángulo de 135° con el eje polar.

Solución

Se realiza una gráfica con los datos.



Luego, de la gráfica se tiene que $\theta_1 = 45º$ y en el triángulo OQP_1, $r_1 = 5\ cos\ 30º = \frac{5}{2}\sqrt{3}$, estos valores se sustituyen en la fórmula $r\ cos\ (\theta - \theta_1) = r_1$ para obtener la ecuación de la recta, por tanto, la ecuación de la recta £ es:

$r\ cos\ (\theta - 45º) = \frac{5}{2}\sqrt{3}$

EJERCICIO 61

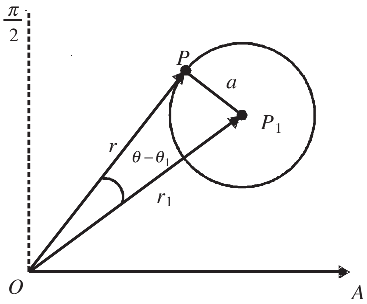
Determina la ecuación polar de las siguientes rectas:

1. Perpendicular al eje polar y se encuentra a 5 unidades a la derecha del polo.
2. Horizontal y está a 7 unidades por debajo del eje polar.
3. Horizontal, pasa por el punto (5, 90°).
4. Vertical, pasa por el punto (–1, 0°).
5. Pasa por el punto (10, 30°) y forma un ángulo de 150° con el eje polar.
6. Pasa por el punto (8, 30°) y forma un ángulo de 165° con el eje polar.
7. Pasa por el punto (2, 150°) y es perpendicular a la recta que une el punto (2, 150°) con el polo.
8. Pasa por el punto (5, 135°) y es perpendicular a la recta que une el punto (2, 135°) con el polo.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Ecuación polar de la circunferencia

Sea el punto P_1 (r_1, θ_1) el centro de una circunferencia, $P(r, \theta)$ un punto de la circunferencia y la distancia entre los puntos el radio a, su ecuación está determinada por la fórmula:



$$a^2 = r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cdot \cos(\theta - \theta_1)$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la ecuación polar de la circunferencia con centro en el punto (4, 30°) y de radio 1 unidad.

Solución

Los valores de $a = 1$, $r_1 = 4$ y $\theta - \theta_1 = \theta - 30°$, se sustituyen:

$$a^2 = r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cdot \cos(\theta - \theta_1)$$

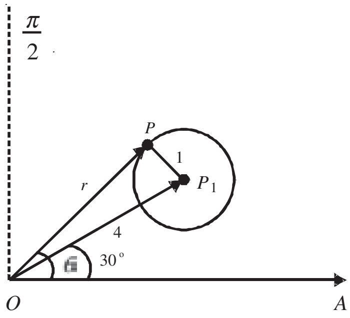
$$(1)^2 = r^2 + (4)^2 - 2r(4) \cdot \cos(\theta - 30°)$$

$$1 = r^2 + 16 - 8r \cdot \cos(\theta - 30°)$$

$$r^2 + 16 - 8r \cdot \cos(\theta - 30°) - 1 = 0$$

Por tanto, la ecuación de la circunferencia es:

$$r^2 - 8r \cdot \cos(\theta - 30°) + 15 = 0$$



EJERCICIO **62**

Determina la ecuación polar de las siguientes circunferencias.

1. Centro el punto (3, 30°) y radio 9 unidades.
2. Centro el punto (5, 120°) y radio 1 unidad.
3. Centro el punto (10, 45°) y radio 4 unidades.
4. Centro el punto (7, 90°) y radio 7 unidades.
5. Centro el punto (0, 0°) y radio 6 unidades.

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Intersección de curvas en coordenadas polares

Al resolver un sistema de ecuaciones en coordenadas rectangulares, se obtienen los puntos de intersección de las curvas. Estos puntos satisfacen recíprocamente el sistema.

En coordenadas polares **no** siempre se cumple la segunda afirmación, ya que un punto en coordenadas polares tiene más de un par de coordenadas polares.

EJEMPLOS

1 Resuelve el sistema de ecuaciones y traza la gráfica de $\begin{cases} r = 4\ cos\ \theta \\ r = 4\ sen\ \theta \end{cases}$

Solución

Se igualan las ecuaciones.

$$4\ cos\ \theta = 4\ sen\ \theta$$

Se dividen ambos miembros entre $cos\ \theta$, si $cos\ \theta \neq 0$, entonces,

$$\frac{4\ cos\ \theta}{cos\ \theta} = \frac{4\ sen\ \theta}{cos\ \theta} \rightarrow 4 = 4\ tan\ \theta \rightarrow tan\ \theta = 1$$

$$\theta = arc\ tan\ (1)$$

$$\theta = 45°,\ 225°$$

Se sustituyen los ángulos encontrados en cualquiera de las ecuaciones para determinar el valor del radio vector r.

$$\text{Si } \theta = 45° = \frac{\pi}{4}\text{, en consecuencia,}$$

$$r = 4\ cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2} \approx 2.8$$

$$\text{Si } \theta = 225° = \frac{5\pi}{4}\text{, entonces,}$$

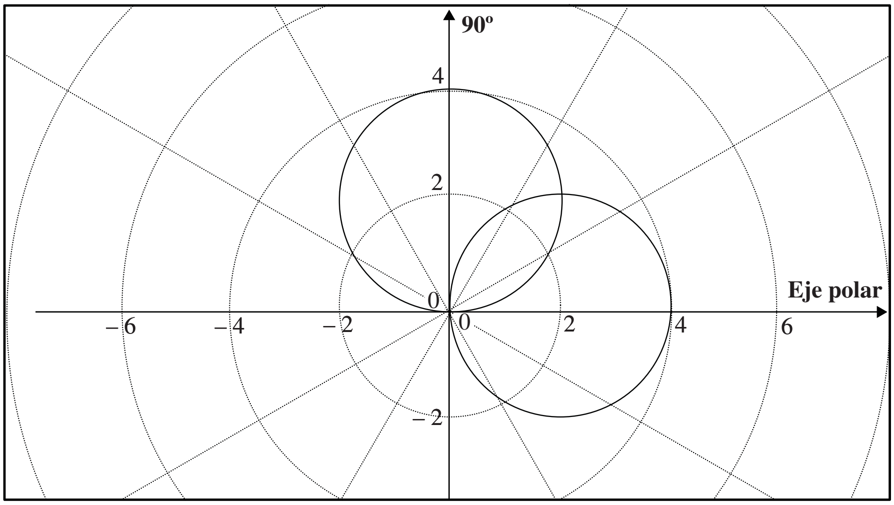
$$r = 4\ cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2\sqrt{2} \approx -2.8$$

Se generan dos puntos de intersección $(2\sqrt{2}, 45°)$ y $(-2\sqrt{2}, 225°)$.

Tabulación:

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	330°
$r = 4\ cos\ \theta$	4	3.4	2.8	2	0	–2	–3	–4	–3.4	–2.8	–2	0	2	3.4
$r = 4\ sen\ \theta$	0	2	2.8	3.4	4	3.4	2	0	–2	–2.8	–3.4	–4	–3.4	–2

Se traza la gráfica de las ecuaciones polares.



En la gráfica se observa que existe un punto de intersección en el polo; sin embargo, para $r = 4\ sen\ \theta$ el punto que determina el polo es (0, 0°), y para la ecuación $r = 4\ cos\ \theta$ el punto que determina el polo es (0, 90°), entonces el origen (polo) no tiene ningún par de coordenadas que satisfagan el sistema.

2 Resuelve el siguiente sistema y traza la gráfica de $\begin{cases} r = 5\cos\theta \\ r = 5\,sen\,2\theta \end{cases}$

Solución

Se igualan las ecuaciones.

$$5\,sen\,2\theta = 5\cos\theta$$

Y al sustituir $sen\,2\theta = 2\,sen\,\theta\cos\theta$ y despejar θ, se obtiene:

$$5\,sen\,2\theta = 5\cos\theta \rightarrow 5(2\,sen\,\theta\cos\theta) = 5\cos\theta$$
$$10\,sen\,\theta\cos\theta = 5\cos\theta$$
$$10\,sen\,\theta\cos\theta - 5\cos\theta = 0$$
$$5\cos\theta\,(2\,sen\,\theta - 1) = 0$$
$$\cos\theta = 0;\; 2\,sen\,\theta - 1 = 0$$
$$\theta = \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2} \text{ o } \theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$$

Se sustituyen los ángulos encontrados en cualquiera de las ecuaciones para determinar el valor del radio vector r.

$$\text{Si } \theta = \frac{\pi}{6} \text{ entonces } r = 5\cos\theta = 5\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5}{2}\sqrt{3} \approx 4.3$$

$$\text{Si } \theta = \frac{5\pi}{6} \text{ entonces } r = 5\cos\theta = 5\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 5\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{5}{2}\sqrt{3} \approx -4.3$$

$$\text{Si } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ entonces } r = 5\cos\theta = 5\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5(0) = 0$$

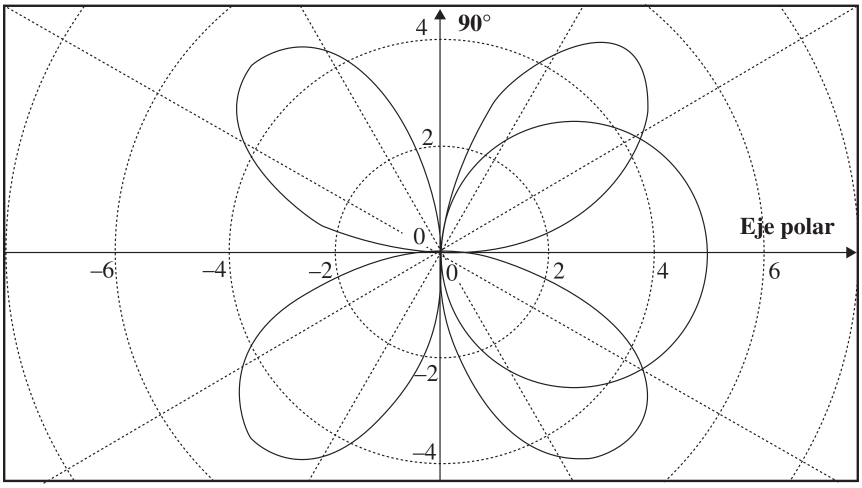
$$\text{Si } \theta = \frac{3\pi}{2} \text{ entonces } r = 5\cos\theta = 5\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 5(0) = 0$$

Por consiguiente, las curvas se intersecan en los puntos $\left(\frac{5}{2}\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}\right)$, $\left(-\frac{5}{2}\sqrt{3}, \frac{5\pi}{6}\right)$, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ y $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Tabulación:

θ	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°
$r = 5\cos\theta$	5	4.3	2.5	0	–2.5	–4.3	–5	–4.3	–2.5	0	2.5	4.3
$r = 5\,sen\,2\theta$	0	4.3	4.3	0	–4.3	–4.3	0	4.3	4.3	0	–4.3	–4.3

Gráfica



EJERCICIO 63

Determina los puntos de intersección y traza la gráfica de los siguientes sistemas de ecuaciones.

1. $\begin{cases} 2r\ cos\ \theta = -\sqrt{3} \\ r = 2\ cos\ \theta - \left(1+\sqrt{3}\right) \end{cases}$

2. $\begin{cases} r = \dfrac{4}{1+sen\ \theta} \\ r\ sen\ \theta = -4 \end{cases}$

3. $\begin{cases} r = 4\ sen\ \theta \\ r\ sen\ \theta = 1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} r = 2 \\ r = 4\ sen\ \theta \end{cases}$

5. $\begin{cases} r = -2\ sen\ \theta \\ r = -2\ cos\ \theta \end{cases}$

6. $\begin{cases} r = 2\ cos\ 2\theta \\ r = 1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} r = \dfrac{1}{sen\ \theta} \\ r\ sen\ 2\theta = 1 \end{cases}$

8. $\begin{cases} r = 3(1+cos\ \theta) \\ r = 6\ cos\ \theta \end{cases}$

9. $\begin{cases} r = \dfrac{6}{1+sen\ \theta} \\ r = \dfrac{2}{sen\ \theta} \end{cases}$

10. $\begin{cases} r = 3\ cos\ 2\theta \\ r = 3\ sen\ \theta \end{cases}$

11. $\begin{cases} r = 5\ sen\ \dfrac{1}{2}\theta \\ r = 5\ cos\ \theta \end{cases}$

12. $\begin{cases} r = 1 - sen\ \theta \\ r = 1 - sen\ 2\theta \end{cases}$

13. $\begin{cases} r = 3(1+sen\ \theta) \\ r = 3(1+cos\ \theta) \end{cases}$

14. $\begin{cases} r = 6\ cos\ 4\theta \\ r = 3 \end{cases}$

15. $\begin{cases} r = 2(1+sen\ 2\theta) \\ r = 2(1+sen\ \theta) \end{cases}$

16. $\begin{cases} r = \dfrac{6\theta}{\pi} \\ r = 2 \end{cases}$

17. $\begin{cases} r = 1+4\ cos\ 2\theta \\ r = 3 \end{cases}$

18. $\begin{cases} r = 4-2\ cos\ \theta \\ r = \dfrac{16}{4+2\ cos\ \theta} \end{cases}$

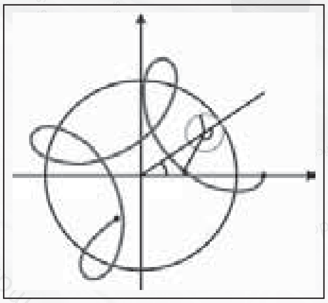
19. $\begin{cases} r = 4-4\ sen\ 2\theta \\ r = 4-4\ sen\ \theta \end{cases}$

20. $\begin{cases} r = 2-sen\ \theta \\ r = 2+cos\ 2\theta \end{cases}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 13

ECUACIONES PARAMÉTRICAS



Gráfica de la hipotrocoide

La gran belleza de las curvas

El campo de las curvas paramétricas está lleno de objetos matemáticos fascinantes y las trocoides destacan por su increíble belleza. Un ejemplo de ello es la curva que se conoce con el nombre de hipotrocoide.

La belleza de esta figura proviene sin duda de su simetría muy particular que se expresa en el lenguaje matemático con las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x=(a-b)\cos t+c\cdot\cos\left(\frac{a-b}{b}t\right) \\ y=(a-b)\,\text{sen}\, t-c\cdot\text{sen}\left(\frac{a-b}{b}t\right) \end{cases}$$

donde *a*, *b* y *c* son constantes.

Definición

Si $f(x, y) = 0$ es la ecuación rectangular de una curva plana y las variables x y y están en función de una tercera variable t, llamada parámetro, entonces,

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

Estas relaciones se conocen como ecuaciones paramétricas.

El objetivo de resolver el sistema es representar en una sola ecuación las variables x y y eliminando el parámetro.

Transformación de ecuaciones paramétricas a rectangulares

Dada una curva en su forma paramétrica, su transformación a rectangular se obtiene con la eliminación del parámetro. No hay un método general para efectuar la eliminación, depende, en cada caso, de la forma de las ecuaciones paramétricas.

Si éstas contienen funciones trigonométricas, la ecuación rectangular surge al eliminar el parámetro por medio de las identidades trigonométricas fundamentales.

Si las ecuaciones paramétricas son algebraicas, su forma sugerirá alguna operación para eliminar el parámetro.

Si de dos ecuaciones paramétricas una es más complicada que la otra, la ecuación rectangular puede obtenerse despejando el parámetro de la ecuación más sencilla y sustituyendo su valor en la otra ecuación.

Sistemas paramétricos algebraicos

Si el sistema paramétrico es algebraico, se elimina por procedimientos algebraicos.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Escribe en su forma rectangular la curva cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 3t \end{cases}$$

Solución

Se despeja el parámetro t de la ecuación $y = 3t$:

$$y = 3t \rightarrow t = \frac{y}{3}$$

y se sustituye en la ecuación $x = 2t - 1$,

$$x = 2\left(\frac{y}{3}\right) - 1 \rightarrow x = \frac{2y}{3} - 1$$

Resulta que la ecuación en su forma rectangular es: $3x - 2y + 3 = 0$.

2 Expresa en forma rectangular la curva cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = -2t^2 + 4t - 3 \\ y = 2t \end{cases}$$

Solución

Se despeja el parámetro t de la ecuación $y = 2t$:

$$y = 2t \rightarrow t = \frac{y}{2}$$

Se sustituye en $x = -2t^2 + 4t - 3$ y resulta que,

$$x = -2t^2 + 4t - 3 \rightarrow x = -2\left(\frac{y}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{y}{2}\right) - 3$$

$$x = -2\left(\frac{y^2}{4}\right) + 2y - 3$$

$$x = -\frac{y^2}{2} + 2y - 3$$

Al multiplicar por 2 e igualar a cero, se obtiene:

$$y^2 + 2x - 4y + 6 = 0$$

3 Expresa en forma rectangular la curva cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = \sqrt{t-1} \\ y = \dfrac{t-1}{t} \end{cases}$$

Solución

Se despeja la variable t de cualquiera de ambas ecuaciones:

$$x = \sqrt{t-1} \rightarrow x^2 = t - 1 \rightarrow t = x^2 + 1$$

Se sustituye en $y = \dfrac{t-1}{t}$, entonces la ecuación en su forma rectangular es:

$$y = \frac{t-1}{t} \rightarrow y = \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1}$$

$$\left(x^2 + 1\right)y = x^2$$

Finalmente, al desarrollar el producto e igualar con cero se obtiene:

$$x^2y - x^2 + y = 0$$

EJERCICIO 64

Determina la ecuación rectangular de cada una de las siguientes ecuaciones paramétricas.

1. $\begin{cases} x=4t \\ y=t \end{cases}$

2. $\begin{cases} x=at+b \\ y=ct-d \end{cases}$

3. $\begin{cases} x=a(1+t) \\ y=2bt \end{cases}$

4. $\begin{cases} x=2-4t \\ y=3t-1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} xt-t=1 \\ ty=2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x=t^2-1 \\ y=t-2 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x=t+2 \\ y=t^2+4 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x=t^2+1 \\ y=2t^2+1 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x^3=t^2+3t-10 \\ y=6t+2t^2 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x=t^2+2t \\ y^3=t^3+3t^2+3t+1 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x+2=(t^2-t)^2 \\ y^2-2y+1=16(t^4-2t^3+t^2) \end{cases}$

12. $\begin{cases} x=t^2-t \\ y=\dfrac{t-1}{t} \end{cases}$

13. $\begin{cases} x=\sqrt[3]{t+2} \\ y=\dfrac{t}{2} \end{cases}$

14. $\begin{cases} x=2t-\dfrac{1}{t} \\ y=\dfrac{t}{3}-\dfrac{1}{t} \end{cases}$

15. $\begin{cases} x=\dfrac{-1}{t^2+4} \\ y=\dfrac{t}{t^2+4} \end{cases}$

16. $\begin{cases} x=\dfrac{4t}{t^2-1} \\ y=\dfrac{4t^2}{t^2-1} \end{cases}$

17. $\begin{cases} x=\sqrt{t+1} \\ y=\sqrt{15-t} \end{cases}$

18. $\begin{cases} x=\sqrt{\dfrac{t+2}{t-1}} \\ y=t-2 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x=\sqrt{\dfrac{t-2}{t+1}} \\ y=\sqrt{\dfrac{t+1}{t-2}} \end{cases}$

20. $\begin{cases} x=\dfrac{2t^2-1}{t^2} \\ y=\sqrt{\dfrac{t-2}{3}} \end{cases}$

21. $\begin{cases} x=\dfrac{t-1}{t^2-1} \\ y=\dfrac{t^2+3t+2}{t^2-4} \end{cases}$

22. $\begin{cases} x=\dfrac{t^3+1}{t+1} \\ y=(t^2-t)^{\frac{2}{3}} \end{cases}$

23. $\begin{cases} x=\dfrac{2t^2-7t-15}{t^2-3t-10} \\ y=\dfrac{t^2-4}{2t^2-t-6} \end{cases}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Sistemas de ecuaciones paramétricas que contienen funciones trigonométricas

Si el parámetro es el argumento de funciones trigonométricas, la ecuación rectangular se obtiene empleando identidades trigonométricas.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Expresa en forma rectangular la curva cuyas ecuaciones son $\begin{cases} x = 3\,tan\,\alpha - 3 \\ y = 2\,sec\,\alpha + 2 \end{cases}$

Solución

Se despejan de ambas ecuaciones *tan α* y *sec α* respectivamente, entonces,

$$x = 3\,tan\,\alpha - 3 \qquad y = 2\,sec\,\alpha + 2$$

$$x + 3 = 3\,tan\,\alpha \qquad y - 2 = 2\,sec\,\alpha$$

$$tan\,\alpha = \frac{x+3}{3} \qquad sec\,\alpha = \frac{y-2}{2}$$

Se sustituyen los despejes en la identidad,

$$sec^2\,\alpha - tan^2\,\alpha = 1 \rightarrow \left[\frac{y-2}{2}\right]^2 - \left[\frac{x+3}{3}\right]^2 = 1$$

$$\frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x+3)^2}{9} = 1$$

Por consiguiente, la ecuación es una hipérbola.

2 Transforma las ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x=2+3\,tan\,\theta \\ y=1+4\,sec\,\theta \end{cases}$ a una ecuación rectangular.

Solución

Las ecuaciones paramétricas contienen funciones trigonométricas, entonces se utiliza esta identidad trigonométrica:

$$sec^2\,\theta - tan^2\,\theta = 1$$

Al despejar en cada ecuación la función trigonométrica y sustituirla en la identidad se obtiene:

$$x = 2 + 3\,tan\,\theta \qquad y = 1 + 4\,sec\,\theta$$

$$x - 2 = 3\,tan\,\theta \qquad y - 1 = 4\,sec\,\theta$$

$$\frac{x-2}{3} = tan\,\theta \qquad \frac{y-1}{4} = sec\,\theta$$

Los despejes se sustituyen en la identidad, por tanto, la ecuación en su forma rectangular es:

$$\frac{(y-1)^2}{16} - \frac{(x-2)^2}{9} = 1$$

3 ¿Cuál es la ecuación en coordenadas rectangulares de la curva cuyas ecuaciones paramétricas son

$$\begin{cases} x = 3\,cos\,\alpha - sen\,\alpha \\ y = cos\,\alpha + 5\,sen\,\alpha \end{cases}?$$

Solución

Se resuelve un sistema de ecuaciones para hallar el valor de *sen* α y *cos* α en términos de x y y.

1. Se elimina la función coseno y se obtiene el valor de *sen* α,

$$\begin{array}{ccc} x = 3\,cos\,\alpha - sen\,\alpha & & x = 3\,cos\,\alpha - sen\,\alpha \\ & \rightarrow & \\ -3(y) = -3(cos\,\alpha + 5\,sen\,\alpha) & & -3y = -3\,cos\,\alpha - 15\,sen\,\alpha \end{array}$$

Y resulta,

$$x - 3y = -16\,sen\,\alpha \rightarrow sen\,\alpha = \frac{x - 3y}{-16}$$

2. Se elimina la función seno,

$$\begin{array}{ccc} 5(x) = 5(3\,cos\,\alpha - sen\,\alpha) & & 5x = 15\,cos\,\alpha - 5\,sen\,\alpha \\ & \rightarrow & \\ y = cos\,\alpha + 5\,sen\,\alpha & & y = cos\,\alpha + 5\,sen\,\alpha \end{array}$$

Y resulta,

$$5x + y = 16\,cos\,\alpha \rightarrow cos\,\alpha = \frac{5x + y}{16}$$

Se sustituyen los despejes en la identidad $sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1$,

$$\left(\frac{x - 3y}{-16}\right)^2 + \left(\frac{5x + y}{16}\right)^2 = 1$$

Al resolver y simplificar,

$$\frac{x^2 - 6xy + 9y^2}{256} + \frac{25x^2 + 10xy + y^2}{256} = 1$$

$$26x^2 + 4xy + 10y^2 = 256$$

Se concluye que la ecuación es:

$$13x^2 + 2xy + 5y^2 - 128 = 0$$

EJERCICIO 65

Transforma las siguientes ecuaciones paramétricas a coordenadas rectangulares.

1. $\begin{cases} x = 4\cos\theta \\ y = 7\,sen\,\theta \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = 2\,sen\,\theta \\ y = 4\cos\theta \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2\,sen\,\theta \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = a\cot\theta \\ y = b\csc\theta \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = 4\tan\theta \\ y = 32\cot\theta \end{cases}$

6. $\begin{cases} x = \cot\theta \\ y = \csc\theta \end{cases}$

7. $\begin{cases} x = \tan^2\theta \\ y = 4\sec^2\theta \end{cases}$

8. $\begin{cases} x = \cos 2\theta \\ y = sen\,\theta \end{cases}$

9. $\begin{cases} x = 2\,sen\,\theta \\ y = 2\,sen\,2\theta \end{cases}$

10. $\begin{cases} x = sen\,\theta \\ y = sen\,3\theta \end{cases}$

11. $\begin{cases} x = 1 + 2\,sen\,\theta \\ y = 2 + 3\cos\theta \end{cases}$

12. $\begin{cases} x = 3 - \cos\theta \\ y = 3 - sen\,\theta \end{cases}$

13. $\begin{cases} x = 2 - 3\,sen\,\theta \\ y = -1 - 2\cos\theta \end{cases}$

14. $\begin{cases} x = 4 - \cos\theta \\ y = 3 - 2\,sen\,\theta \end{cases}$

15. $\begin{cases} x = \tan 2\theta \\ y = \tan\theta + 1 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x = 2\sec\theta + 1 \\ y = 2\tan\theta \end{cases}$

17. $\begin{cases} x = 2\cos\theta - 2\,sen\,\theta \\ y = \cos\theta + 2\,sen\,\theta \end{cases}$

18. $\begin{cases} x = 3\cos\theta - 5\,sen\,\theta \\ y = \cos\theta - sen\,\theta \end{cases}$

19. $\begin{cases} x = 2\csc\theta - 3 \\ y\,sen\,\theta = 2\,sen^3\theta + \cos\theta\,sen\,2\theta + 2 \end{cases}$

20. $\begin{cases} x = \dfrac{2}{sen\,\theta} \\ y = 2 + 3\cot\theta \end{cases}$

21. $\begin{cases} x = \dfrac{\cos 2\theta}{\sqrt{1 - sen^2\theta}} \\ y = 4\cos\theta \end{cases}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente